内容提要

本书论述了飞机和导弹发展过程中产生的颤振现象，从它的机理、成因、表达方式、解算过程等，均作了扼要的阐述。分析中用到的非定常气动力理论，从亚音速到超音速以至高超音速、从二元到三元作了有选择性的介绍，并提出了一些可行的计算方法。

本书还涉及了航天飞机的相关问题以及颤振的主动控制和最佳化。特别对小展弦比翼面的颤振、带舵机和操纵系统的舵面颤振、组合体颤振、蒙皮颤振以及气动加热的影响均作了分析处理，并列举了颤振问题与飞机、导弹工程设计的若干关系。提出了预防颤振发生的措施，还推荐了一些估算公式。最后，还涉及了颤振试验。

本书可供从事航空和航天工业以及相近学科领域(诸如风力发电、跨海大桥)的设计人员和工程技术人员参阅，对理工科高校有关专业的学生亦有裨益。

序*

本书作者尹传家是我尊敬的学长，出生在湖南的一个小山村的农民家庭，他是在新中国的雨露阳光的滋润下走进学校大门的。1956年，他高中即将毕业时，被国家挑选保送到北京航空学院（简称“北航”，现名北京航空航天大学）上大学，1960年毕业于北航飞机设计专业。

北京航空学院创建于1952年，是新中国第一所培养航空航天科技人才的高等院校，是“培养航空航天工程师的摇篮”，它从建校起就推行并实践教育与科学研究、工程实践、生产劳动相结合，在实践中培养学生的全面素质。1958年北航师生破除迷信、奋发图强，大战一百天研制成中国第一架轻型旅客机、中国第一架无人驾驶飞机、中国第一枚探空火箭向当年国庆节献礼，创造了在一所大学中由师生研究、设计并制造飞机和火箭的奇迹。本书作者尹传家就是上述型号项目的参与者。通过在北航的近五年学习，培养了“艰苦朴素、勤奋好学、全面发展、勇于创新”的全面素质，为他

---

* 本序作者沈士团系北京航空航天大学原校长，教授、博士生导师、俄罗斯宇航科学院外籍院士，第九届、十届全国政协委员，中国高科技产业化研究会副理事长，中国宇航学会常务理事，中国工程院教育委员会委员，北京市科协常委。

今后的工作打下了基础。1960年在他即将毕业的时候，国家又挑选了他，到国防部第五研究院从事航天科技工作。国家的需要，人生的机遇造就了像作者这样一代默默奉献的航天人。

尹传家同志在航天科技战线从事火箭、导弹研制工作近三十年，他曾担任多项国防重点科研课题负责人、产品设计师及某新型导弹试验现场总指挥。在那个年代，他和他的战友们进入戈壁沙漠、风餐露宿、艰苦创业，为“两弹一星”的伟业做出了贡献，他因此而多次立功受奖。两年前，作者不幸身患直肠癌，在他与病魔进行顽强斗争的同时，他以百折不挠的精神于2006年创作出版了充满时代气息、讴歌为祖国航天事业奋斗不息的航天人的长篇小说——《梦系太空》，今天他又克服了种种困难，总结在航天科技战线工作多年的经验，编著了《飞行器的颤振》这部科技著作。尹传家同志的所有这些事实充分体现了我国航天人所特有的一种精神，这就是“特别能吃苦、特别能战斗、特别能攻关、特别能奉献”的航天精神，这是值得我们学习的。

这里我要着重说明的是气动弹性力学及其重要分支——颤振不是我的专业领域，我对《飞行器的颤振》这部科技著作的专业内容无法提出具体意见，但我知道颤振问题在飞行器的研制过程中是必须要研究考虑的重要问题。应当说《飞行器的颤振》是作者尹传家同志自北航毕业后，

整整三十年从事气动弹性研究工作，对颤振问题做了较为全面的科学考察和实践，而写出的著作。因此，我相信本书的出版，对从事航空航天和相关学科及工程领域的工程技术人员一定会有裨益的，对理工科高等院校相关专业的学生亦应有参考价值。

最后，我作为尹传家同志的校友，衷心祝愿我尊敬的学长战胜病魔，健康长寿，我也期盼着尹传家同志在身体力行的情况下，继续完成他的写作愿望，谱写他的更加精彩的人生。

沈士团

2007 年 7 月 6 日于北航

目　录

第一章 绪 论

从世界上出现第一架飞机，至今也不过一百零四年的时间，而航空和航天技术的发展，却经历着日新月异的飞跃。图 1-1 形象化地描绘了近半个世纪以来，螺旋桨和喷气式典型的亚音速飞机到细长的超音速和高超音速飞机直至宇宙飞船的演变过程。除了飞行速度提高之外，由于气动力的原因，飞机的几何形状也发生了一系列的变化。图 1-2 和图 1-3 分别概括了飞机机翼厚度比和展弦比的发展趋势。

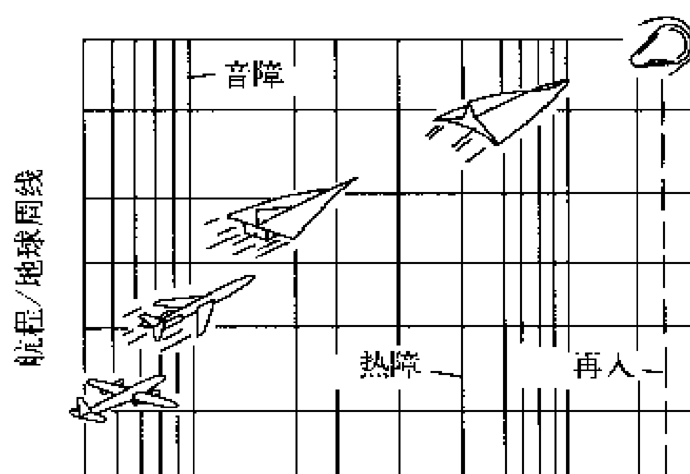


图 1-1 飞行器的气动外形和飞行马赫数的关系

在飞行器的发展过程中，由于气动弹性的缘故，机毁人亡的飞行事故屡见不鲜。1903 年兰利(S. P. Langley)设计了单翼飞机，他驾驶着飞机在美国的波托马克河畔试飞时，因机翼的扭转发散致使飞机坠落而失事。不久，莱特兄弟用双翼飞机完成了人类的第一次动

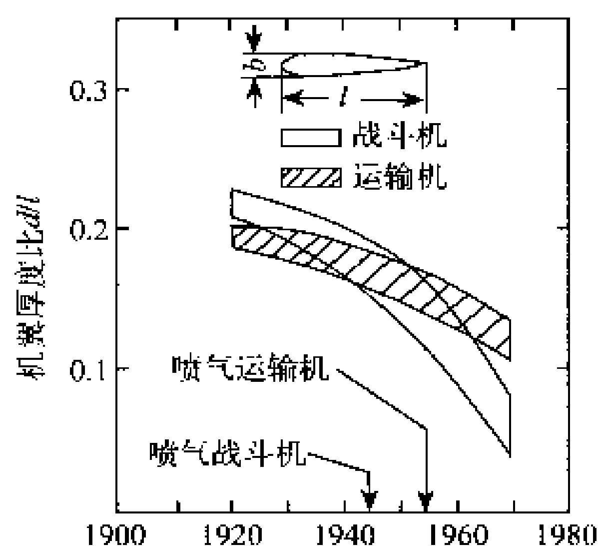


图 1-2 机翼厚度比的发展趋势

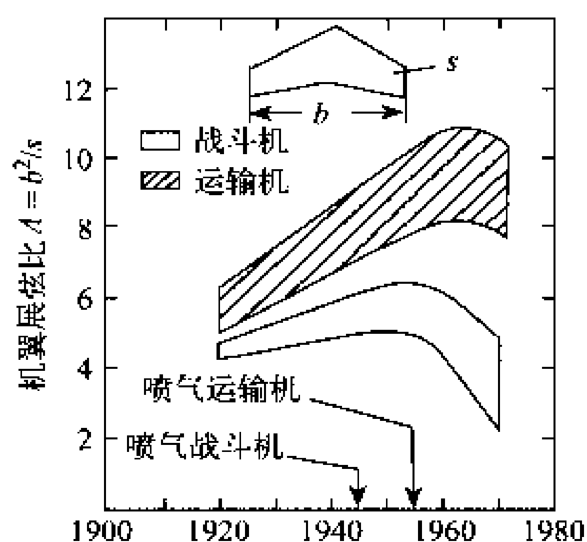


图 1-3 机翼展弦比的发展趋势

力飞行。由于双翼飞机的试飞成功和单翼飞机的失事，使得双翼飞机在以后多年一直占据着统治地位。从技术角度来看，当时单翼飞机的机翼缺乏估算扭转刚度的适当准则。在只有双翼飞机作为军用飞机的日子里，由于机身和尾翼的扭转刚度不够，出现了尾翼颤振。

例如，第一次世界大战初期的韩德里-佩其轰炸机因尾翼颤振而坠毁。1917 年 DH-9 飞机也出现过尾翼颤振。在找到与这种现象作斗争的办法之前，又丧失了一些人的生命。随着单翼飞机的出现，由于机翼缺乏足够的扭转刚度，引起机翼变形的加大，从而导致颤振的产生、副翼效率的降低以及载荷分布的改变。其中以德国容克(Fokker)D-8 型飞机最具有代表性，这种上单翼飞机的扭转刚度按双翼飞机所用的准则估算。当时认为 D-8 型飞机具有卓越的性能。但在空战的最初日子里，飞机以数倍于最大速度的速度作俯冲时，机翼发生折断，飞机曾多次坠地，从而酿成毁灭当时德国空军精华的危险，当初还找不出事故的原因。经过后来的试验研究表明，这种飞机的机翼强度是很富裕的，足以承受六倍极限过载，而在急速俯冲时，机翼端部的攻角明显地增加，从而引起载荷的迅速加大，致使机翼扭转而折断。在第一次世界大战以后的 D-8 型飞机试验中，美国空军工程师们发现了强烈的、但不会引起破坏性的机翼-副翼组合的弯曲颤振现象，并利用副翼绕铰链轴的静平衡，消除了这一现象。1920 年至 1930 年的一些竞赛用的单翼飞机曾出现过机翼-副翼组合的颤振现象。第二次世界大战初期，德国的 V-2 导弹在荷兰的普里伯特·马萨试验时，由于靠近导弹头部的蒙皮颤振而引起多次事故。对于近代的土星 V-阿波罗飞行器，蒙皮颤振问题仍然是相当麻烦的，需要进行仔细的考虑。此外，据统计：1944 年至 1960 年，英国的 54 种飞机上发生了 81 起颤振事故；1947 年至 1957 年的十年内，美国的民用和军用飞机共发生了 100 多起不同形式的颤振，其中大多数是操纵面和调整片、带外部贮箱的机翼以及 T 型尾翼的飞机。图 1-4 是一架美国早期的喷气歼击机发生颤振以后的飞机后视图。它在作跨音速飞行时，由于水平尾翼发生颤振，使其在翼展的三分之二处折断。从图上可以看出，平尾左翼的折断部分还连挂着，飞行员驾驶着这架因颤振而损坏的飞机安全着陆了。

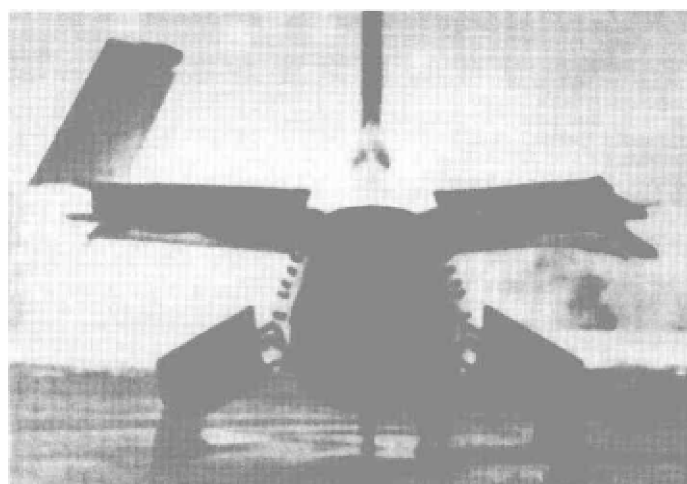


图 1-4　因颤振损坏的一架喷气飞机

前苏联的米格型歼击机，为了预防操纵面（特别是全动式平尾）的颤振发生，在结构上付出了一定的代价。

由于颤振往往造成严重的飞行事故，在飞机和导弹的研制过程中作为需要精心考虑的问题，引起了人们极大的重视，并逐步掌握了一定的规律性。因此情况有所改变，例如在 1960 年至 1972 年间，英国只发生了 7 起不太严重的颤振事故，但尚不能完全杜绝它的发生。法国的"幻影 F-1"型超音速战斗机于 1967 年因颤振事故而坠毁；1972 年西德与荷兰联合研制的 VFW-614 短程运输机的第一架原型机，因升降舵调整片颤振而失事。

飞行中的颤振有很多种类，如机翼颤振、尾翼颤振、舵面颤振、副翼嗡鸣（一种特殊形式的颤振）、蒙皮颤振和飞机的螺旋桨（1960 年涡轮螺旋桨发动机飞机因螺旋桨的涡流颤振引起了两起较大的事故）、发动机的转子、涡轮、压气机的叶片以及直升飞机的旋翼颤振等。在航空技术之外，还有天线颤振、吊桥颤振等。众所周知，1940 年托可马吊桥因气动弹性振动引起的毁坏，在当时轰动一时，曾拍成电影，作为新闻报道放映过。从此以后，建筑工程师对桥梁颤振（尤其是钢结构吊桥）极其重视。

对于宇宙航行运载系统，由于缺少升力面，经典的气动弹性效应虽然也出现一些，但却是全新的类型，即引起与经典的颤振有关的、伺服机构的弹性振动稳定性问题。

航天飞机装有常见的升力面和操纵面，习见的气动弹性具有很大的意义，尤其是气动热弹性问题须引起特别的注意。

随着现代飞行器的速度和性能的迅速提高，开始广泛采用细长机身和薄机翼，以尽量减轻结构重量。但是由于结构柔性很大，飞行环境也较为复杂，在严重的外载荷作用下，飞行器的部件将产生很大变形。图 1-5 表示 B-52 轰炸机的机翼在最大使用载荷作用下，翼尖的上下挠度可达 10 m 左右。这样，由于结构的弹性变形与气动力的耦合作用，使得气动弹性更为突出。

颤振问题涉及到近代飞机和导弹结构设计的主要问题。基于颤

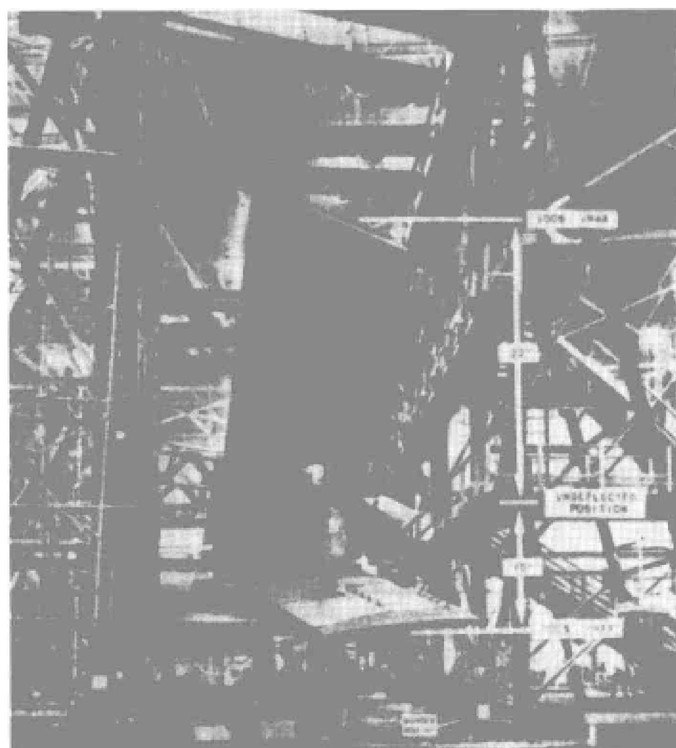


图 1-5　静力试验时，B-52 型飞机机翼在最大使用载荷条件下的最大翘曲变形

振要求的刚度准则，在很多情况下，成了临界设计准则。对于一些部件，按照强度要求设计，再作刚度校准的传统方法，已不适用了。颤振不仅是气动弹性问题，它还影响着飞行器设计的成败。现代飞行器经受过多种颤振形式。经典的颤振类型与势流有关，而非经典的颤振至今仍很难用纯理论的方法进行分析。在分离流、或者周期性的分离流中，在失速状态和气动力之间具有不同的滞后效应以及各种运动姿态下，均可能出现颤振。

大量的事实使人们认识到，颤振在飞行中是一个祸害，必须和它作斗争。以前预防颤振，一般采取增加结构刚度、质量平衡或者限制飞行速度等措施。这是比较被动的方法，这些方法对飞行器性能带来严重不利的影响。近年来，研究了一种利用飞行控制系统控制或改变飞机结构和气动力特性的“颤振主动控制”方法。颤振主动控制技术已成功地用于超音速运输机、C-5A、波音-747、B-1、F-4 以及 F-16等飞机上，并取得了良好效果。随着计算技术的发展，颤振最佳化方法已在实际飞行器设计中日益广泛地被采用。应用这种方法，对某些机翼、直升机旋翼、机身蒙皮等部件的设计结果表明，在相同的气动弹性要求条件下，可使结构重量减少 5%～15%；在保持结构重量大致相等的情况下，颤振速度可以提高 20%～30%。

成功的颤振分析，取决于结构分析和非定常气动力的计算。在结构上，翼面已由传统的梁式结构过渡到板状结构。在非定常气动理论方面，包括亚音速、跨音速、超音速以及高超音速的广阔速度范围。以升力线的方法而论，就有二十余种。自 20 世纪 50 年代以来，大力发展了升力面理论。因此，我们只能选取其中最常用的、最具有代表性的方法，诸如二元狭条理论、核函数方法、超音速位势理论、细长机翼理论以及活塞理论等。

关于颤振分析方法，主要有两种。一种是形态法（可用图 1-6 表示为方块图的形式），即用若干个振动形态的叠加来表示结构变形。该方法是把无限多个自由度的连续结构简化为有限个自由度的系

统。对于翼面，一般取头几阶非阻尼的固有振型，而对于复杂组合体，可取至 20 阶以上。这些固有振型和固有频率以及广义质量等可根据结构图进行计算，也可通过地面试验求得。气动力可由理论计算或风洞试验确定。另一种是"离散"法，即把连续结构离散为许多分立的基元，自由度的数目取决于基元的多少，显然比形态法高得多。过去，习称为影响系数法(参见附录)。这种方法适于用高速计算机求解。离散法近来发展为结构分析的有限元法。对于像波音-747 这类复杂的飞行结构，应用有限元结构分析计算程序已被证明是成功的。

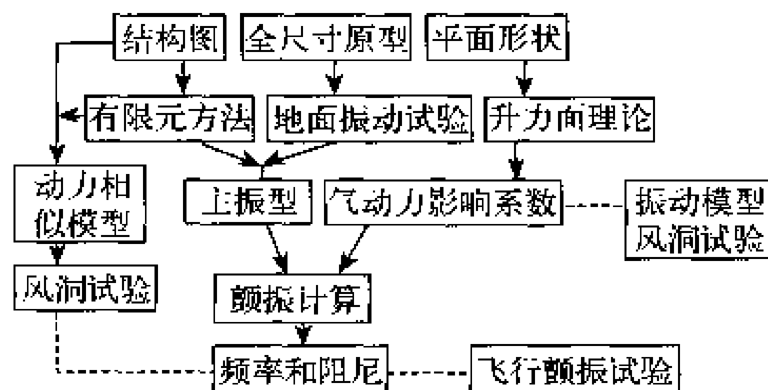


图 1-6　颤振分析的方块图

第二章　颤振机理

§1. 气动弹性问题的分类

气动弹性力学是研究气动力、弹性力以及惯性力相互作用的一门学科。现在，我们借助于力的三角形对气动弹性问题进行分类。所述的气动力、弹性力和惯性力分别用英文字母的 A、E 和 I 表示，并置于三角形的顶点。对于每一种气动弹性现象按其与三个顶点（即三个力）的关系，画出它的图形（图 2-1）。

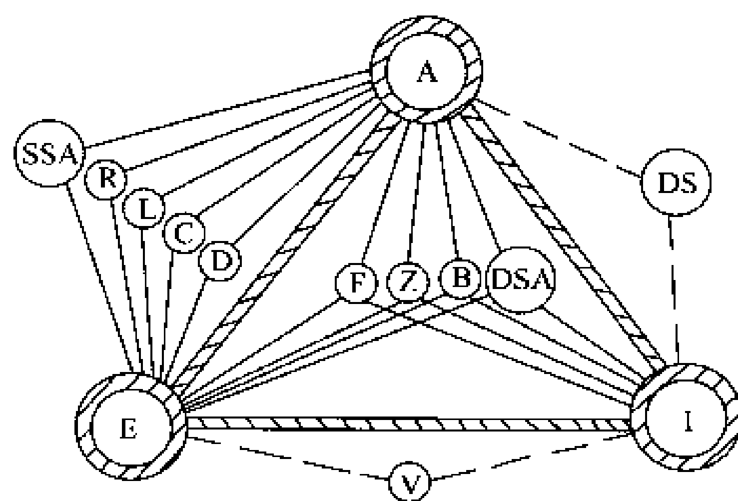


图 2-1　气动弹性的力三角形

图 2-1 包含着三种类型的问题。

（一）动气动弹性现象　位于三角形之内，与三种力均有关，则应与三个顶点相连结。如：

Ⓕ——颤振。

Ⓑ——抖振。

Ⓩ——动力响应。

(DSA)——气动弹性对动稳定性的影响。

（二）静气动弹性现象　位于三角形之外的左上角，它只与气动力和弹性力有关。如：

Ⓓ——发散。

Ⓒ——操纵效率。

Ⓡ——操纵面反逆。

Ⓛ——考虑弹性变形的载荷分布。

(SSA)——气动弹性对静稳定性的影响。

（三）相关的问题　位于三角形之外的下方和右上角。如：

Ⓥ——机械振动。

(DS)——刚体飞行力学。

当飞行器发展到超音速和高超音速时，又引出了气动热弹性的概念。在力的三角形的基础上，扩充为气动热弹性的力四面体（图2-2）。其中 T 表示热源引起的热力。该四面体的四个面均代表着一定的问题范畴。即

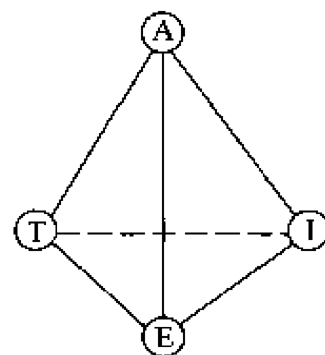


图 2-2　气动热弹性的力四面体

Ⓐ Ⓔ Ⓘ—— 代表典型的气动弹性问题。

Ⓐ Ⓣ Ⓘ——属于气动热弹性范畴之外的气动热动力学问题。

Ⓐ Ⓣ Ⓔ—— 静气动热弹性问题。

Ⓔ Ⓘ Ⓣ——考虑热对振动特性影响的热弹性动力学问题。

气动热弹性包含着Ⓐ Ⓔ Ⓘ Ⓣ的相互作用，关于这部分我们在下面还要讨论。

§ 2. 颤振机理

在所有的气动弹性现象中，颤振是经常发生的。当飞行器在达到临界颤振速度飞行时，出现的自激振动往往带来灾难性的严重后果，刹那间可能引起机翼或者尾翼爆发性的破坏，并且多半涉及到整个飞机，造成机毁人亡。因此，我们着重对它进行分析和讨论。

颤振是一种自激振动。参考书[1]对自激振动作了精辟的论述。这里，以图 2-3 所示的弹簧-阻尼器的一自由度系统说明。该系统的运动方程式可写为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (2\text{-}1)$$

式中，m 为质量，x 为质量 m 离开静平衡位置的位移，k 为弹簧常数，c 为阻尼系数。通常 $c > 0$ 称为正阻尼，$c < 0$ 称为负阻尼。

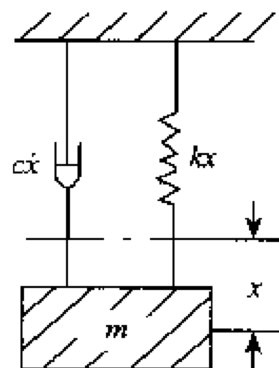


图 2-3　弹簧—阻尼器系统

现在，我们按照阻尼的正负来考察系统的运动情况。当 $c > 0$，$t = 0$ 时，系统受到微小的扰动以后，运动如图 2-4(1) 所示，运动的振幅随时间而逐渐减小，与速度反向的阻尼力作负功，系统的能量转化为阻尼器的热量。当 $c < 0$ 时，系统受到微小的扰动以后，运动如图 2-4(2) 所示，运动的振幅随时间而增大。此时，阻尼力作正功，致使系统的能量增加。这种由于微小的扰动，因系统本身的特性而导致振动扩大的现象，称为自激振动，亦可称为不稳定振动。而当 $c = 0$ 时，系统受到微小的扰动以后，运动为等幅振动，如图 2-4(3)所示。

下面，我们先以机翼的弯曲—扭转颤振为例(此时，副翼刚性固定)，就颤振产生的原因说明。

飞机在飞行过程中，机翼常常受到外力的干扰，如阵风的影响。假若机翼在外力的作用下，产生了向下的弹性变形，机翼结构内部的

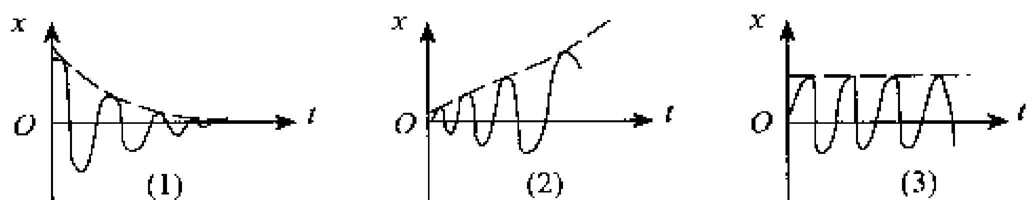


图 2-4　图 2-3 的系统的运动情况

弹性力则会使机翼回到初始位置。在这种情况下，机翼出现向上的加速运动。于是，在机翼上便会产生惯性力，该力作用在翼剖面的重心，其方向与加速度的方向相反。如果重心在剖面的刚心之后，则惯性力对刚心构成一个抬头力矩（图 2-5(1)）。该力矩使翼剖面相对于弹性轴产生顺时针方向的扭转，从而获得一个附加的正攻角 $+\Delta\alpha$。于是，在机翼上产生相应的附加气动力，它作用在翼剖面的气动力中心，促使机翼的扭转变形加大（见图 2-5(2)）。由于弹性力的作用，机翼很快回到它的初始位置（见图 2-5(3)）。当机翼由下向上加速运动时，积累了足够大的能量，促使机翼在越过初始位置而继续向上运动，使其产生向上的弯曲变形。同时，向上的附加气动力使得这种弯曲变形加大。在越过初始位置之后，弹性力和惯性力的方向改变，此时惯性力对刚心构成低头力矩，使得机翼按逆时针方向扭转，翼剖面的攻角逐渐减小，附加的气动力也随之减小（见图 2-5(4)）。此时，一方面机翼继续向上弯曲变形（见图 2-5(5)），另一方面攻角继续减小，以致惯性力所构成的低头力矩使翼剖面具有一个附加的负攻角 $-\Delta\alpha$。由该负攻角而产生的附加气动力继续使翼剖面低头，促使机翼的扭转变形加大（见图 2-5(6)）。由于弹性力的作用，机翼又将回到初始位置。同样地，因能量的积累，促使机翼向下弯曲变形（见图 2-5(7)、图 2-5(8)）。同时，向下的附加气动力使这种变形加大，越过初始位置以后，弹性力和惯性力的方向改变了。当机翼继续向下弯曲变形时，与上相同，机翼抬头，翼剖面按顺时针方向扭转，致使翼剖面的（负）攻角减小，直至攻角为零（见图 2-5(9)）。

如果飞行速度足够大，在弹性力、惯性力和附加气动力的共同作用下，重复着上述的振动过程，形成一种等幅振动，即为机翼的弯曲-扭转颤振的临界状态。

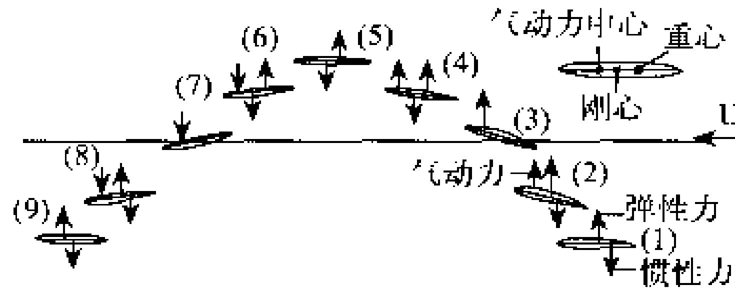


图 2-5　机翼弯曲-扭转颤振过程

从机翼弯曲-扭转颤振的过程中，可以看出：

1. 如果把机翼做成很刚硬，即刚度很大，以至在机翼受力以后所产生的弹性变形小到可以忽略不计，这样便不会产生颤振。实际上，为了提高飞机的飞行性能，总是尽可能地把结构做得轻一些。也就是说，结构具有一定的刚度，在外力的作用下总会产生弹性变形，这就有可能在飞行中发生颤振。

2. 机翼的弯曲-扭转颤振，发生在翼剖面的重心位于刚心之后。如果设法将重心位置移到弹性轴上或弹性轴之前，则可避免颤振的发生。实际上，只要重心前移一定距离即可。因为前移一段距离，惯性力到刚心的力臂就缩短了，惯性力对刚心的力矩也小了，于是机翼的扭转变形也随之减小，即机翼的附加攻角变小，则附加的空气动力便减小了。显然，重心前移越多，附加的气动力则越小。如果重心前移，使得附加的空气动力小到不足以加大机翼的弯曲和扭转变形时，则不会发生颤振。

3. 在机翼弯曲-扭转颤振的过程中，讨论了使机翼加大弯曲和扭转变形的附加气动力。我们把这种使振幅（即变形）加大的作用力，称为激振力。由于它是由机翼扭转变形所引起的附加攻角而

产生的附加气动力，所以其大小与飞行速度有关。此外，机翼的弯曲和扭转变形，还会受到支持部位和结构材料、材料内部的摩擦力以及空气阻力的限制，使其弯曲和扭转变形减小，我们把这种阻制力称为阻尼力，它的方向与运动方向相反，其大小与飞行速度有关。显然，如果激振力作的功大于阻尼力作的功，则振动的振幅不断扩大，直至发生颤振，造成结构破坏；反之，如果激振力作的功小于阻尼力作的功，则振动的振幅不断衰减，最后振动消失。而当激振力作的功与阻尼力作的功相等时，保持为振幅不变的简谐运动。我们把此时的飞行速度称为颤振临界速度(图 2-6)。严格说来，对于在一定的空气密度和温度的大气中飞行的结构，把作简谐运动的变形振动时的飞行速度，定义为颤振临界速度(U_f)。此时的振动频率，称为颤振频率(ω_f)。

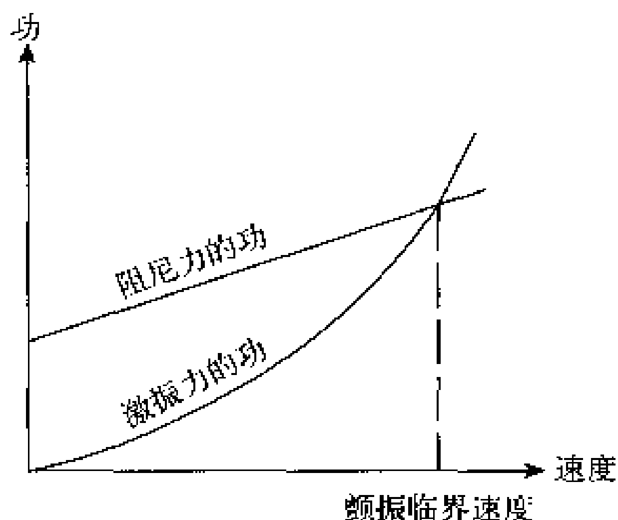


图 2-6　功-速度图

对于带副翼的振动机翼，也可作类似的讨论。为简单起见，认为机翼的扭转刚度很大，即不产生扭转变形，同时假定副翼可以偏转，副翼剖面的重心在转轴的后面。此时，机翼具有弯曲和副翼偏转两个自由度(图 2-7)。当机翼从下面回到初始位置时，作用在副翼重

心上的惯性力引起副翼向下偏转，于是产生了向上的附加气动力。在越过初始位置以后，副翼重心上的惯性力改变方向，使副翼偏角减小（见图 2-7(4)）。当机翼-副翼系统达到最大偏离初始位置时，向上的惯性力已使副翼的偏角为零（见图 2-7(5)）。以后又使副翼向上偏转，于是产生了向下的附加气动力（见图 2-7(6)，图 2-7(7)）。机翼在振动过程中，从气流中吸取能量，当激振力作的功大于阻尼力作的功时，所引起的振动就是机翼弯曲-副翼偏转颤振，该现象开始时的速度，称为机翼弯曲-副翼偏转颤振的临界速度。

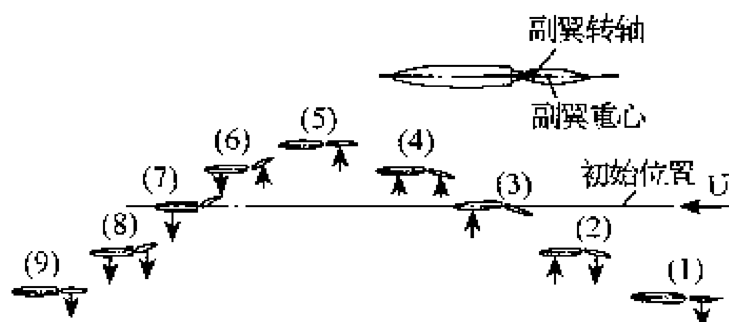


图 2-7　机翼弯曲-副翼偏转的颤振过程

当飞行速度低于颤振临界速度，振动是衰减的；当飞行速度大于颤振临界速度，振动则扩大，直到结构破坏为止。

由上可知，颤振是由气动弹性效应引起的自激的、动力不稳定的、十分危险的振动。

通常，我们用简单的机翼弯曲-扭转颤振和机翼弯曲-副翼偏转颤振的形成过程说明颤振的成因，只能反映颤振机理的基本方面，并非它的全貌。如以高速飞行器的小展弦比机翼为例，从结构上来讲，它已由传统的梁的结构，过渡到板状结构，对这种结构的颤振分析，必然要采用连续的弹性体的方法，自由度的数目应该是无限多个，其变形形态就难以用弯曲和扭转变形来表示。在以下各部分，我们以高速飞行器的部件结构作为侧重点，研究颤振的分析方法。

第三章　自然振动的分析方法

§1. 基本方程式

飞机和导弹结构具有无限多个自由度，对于这种弹性系统，自由振动形态是很复杂的。然而，我们从中可找出一些简单的且有规律的主振动，亦称为自然振动（或者固有振动）。此时，系统按一定的形态以同一频率作简谐振动，对应的频率称为该系统的自然频率（或固有频率），此时的形态称为自然振动形态（或固有形态）。可以证明，一个有 n 个自由度的系统，应有 n 个自然振动形态和 n 个自然振动频率。我们把这 n 个自然频率按其大小，由小到大依次排列，分别称为一阶（最低的）、二阶、三阶……n 阶频率。

自然振动是在没有外力作用的情况下，由弹性系统本身固有的力（弹性力和惯性力）作用的结果。因此，自然振动频率及其形态取决于该系统的刚度分布和质量分布，它们属于该系统的固有特性。

以下，我们建立求解固有频率和固有振型的运动方程式。

据虚功原理和达朗伯尔原理知，在任何的虚位移上，主动力作的虚功加上惯性力作的虚功等于零。

用数学形式表示为：

$$\delta W_i + \delta W_e - \delta U = 0 \tag{3-1}$$

式中，δW_i 为惯性力作的虚功，δW_e 为全部外力作的虚功，$-\delta U$ 为全部内力作的虚功，其大小等于系统的应变能增量，U 为系统的应变能，由于内力的方向与位移的方向相反，在 δU 的前面加上负号，即为

内力作的功。

对于一有限多个自由度的系统，选取有限多个（例如 n 个）广义坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 表征系统的位置状态，它们与直角坐标之间存在着下列关系：

$$
\begin{aligned}
x &= x(q_1,q_2,\cdots,q_n) \\
y &= y(q_1,q_2,\cdots,q_n) \\
z &= z(q_1,q_2,\cdots,q_n)
\end{aligned}
\tag{3-2}
$$

现在，我们给系统以无限小的虚位移 $\delta q_1,\delta q_2,\cdots\delta q_n$，则直角坐标的虚位移表达式：

$$
\begin{aligned}
\delta x &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial q_i}\delta q_i \\
\delta y &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial q_i}\delta q_i \\
\delta z &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial q_i}\delta q_i
\end{aligned}
\tag{3-3}
$$

设 P_x,P_y,P_z 为作用在系统表面的单位面积上的外力的三个分量，则全部外力作的虚功为

$$
\delta W_e = \int_S (P_x\delta x + P_y\delta y + P_z\delta z)\mathrm{d}S \tag{3-4}
$$

将(3-3)式代入(3-4)式，得

$$
\begin{aligned}
\delta W_e &= \sum_{i=1}^{n}\int_S\left(P_x\frac{\partial x}{\partial q_i} + P_y\frac{\partial y}{\partial q_i} + P_z\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)\mathrm{d}S\mathrm{d}q_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} Q_i\delta q_i
\end{aligned}
\tag{3-5}
$$

式中
$$
Q_i = \int_S\left(P_x\frac{\partial x}{\partial q_i} + P_y\frac{\partial y}{\partial q_i} + P_z\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)\mathrm{d}S \tag{3-6}
$$

称为广义外力（对应于广义坐标 q_i）。

内力作的虚功为

$$
-\delta U = -\left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial q_n}\delta q_n\right)
$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i \tag{3-7}$$

设弹性系统的质量密度为 $\tilde{m}(x,y,z)$，$-\tilde{m}\ddot{x}$，$-\tilde{m}\ddot{y}$，$-\tilde{m}\ddot{z}$ 为作用在单位体积上的惯性力在直角坐标中的三个分量，则它们所作的虚功之和：

$$\delta W_i = -\int_V \tilde{m}\ (\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z)\mathrm{d}V$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\int_V \tilde{m}\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)\mathrm{d}V\delta q_i \tag{3-8}$$

由于

$$\begin{aligned}
\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_i} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)\\
\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_i} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\dot{y}^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\dot{y}^2}{2}\right)\\
\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_i} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\dot{z}^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\dot{z}^2}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3-9}$$

于是

$$\delta W_i = -\sum_{i=1}^{n}\int_V \tilde{m}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2}\right)\right\}\mathrm{d}V\mathrm{d}q_i$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\delta q_i \tag{3-10}$$

式中

$$T = \int_V \tilde{m}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2}\right)\mathrm{d}V \tag{3-11}$$

为系统的动能。

将(3-5)、(3-7)、(3-10)式代入(3-1)式，得到

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} - Q_i\right]\delta q_i = 0$$

因 δq_i 是任意的虚位移增量，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3-12}$$

这就是著名的拉格朗日运动方程式。它既是解动力学问题的惯用方法,又是颤振分析计算的有效工具。

对于无阻尼的自由振动,拉格朗日运动方程式具有下列形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial U}{\partial q_i}=0 \tag{3-13}$$

选取广义坐标 q_i 表示系统的变形,则系统的动能和应变能写为:

$$T=\frac{1}{2}\iint_S \widetilde{m}(x,y)[h_i(x,y)\dot{q}_i(t)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3-14}$$

$$U=\frac{1}{2}\iint_S k(x,y)[h_i(x,y)q_i(t)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3-15}$$

其中,$\widetilde{m}(x,y)$ 为系统的质量分布函数,$k(x,y)$ 为系统的刚度分布函数。(3-14)、(3-15)式可改写为

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\iint_S \widetilde{m}(x,y)[h_i(x,y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\dot{q}_i^2(t)\\&=\frac{1}{2}M_i\dot{q}_i^2(t)\end{aligned} \tag{3-16}$$

式中

$$M_i=\iint_S \widetilde{m}(x,y)[h_i(x,y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3-17}$$

称为广义质量。

$$\begin{aligned}U&=\frac{1}{2}\iint_S k(x,y)[h_i(x,y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}yq_i^2(t)\\&=\frac{1}{2}K_i\cdot q_i^2(t)\end{aligned} \tag{3-18}$$

式中

$$K_i=\iint_S k(x,y)[h_i(x,y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3-19}$$

称为广义刚度。

将(3-16)、(3-18)式代入(3-13)式,得到

$$M_i\ddot{q}_i + K_i q_i = 0 \tag{3-20}$$

由于 $q_i(t) = \bar{q}_i e^{i\omega t}$，$\ddot{q}_i(t) = -\omega^2 \bar{q}_i e^{i\omega t} = -\omega^2 q_i(t)$，则

$$-\omega^2 M_i q_i + K_i q_i = 0 \tag{3-21}$$

写成矩阵形式：

$$-\omega^2[M]\{q\} + [K]\{q\} = 0$$

$$\frac{1}{\omega^2}\{q\} = [K]^{-1}[M]\{q\} \tag{3-22}$$

令$\frac{1}{\omega^2}=\lambda$，则

$$\lambda\{q\} = [K]^{-1}[M]\{q\}$$

$$\lambda\{q\} = [U]\{q\} \tag{3-23}$$

其中 $$[U] = [K]^{-1}[M]$$

称为动力矩阵，它等于结构刚度矩阵的逆矩阵（即结构柔度矩阵）与质量矩阵的乘积。

(3-23)式称为特征方程式，进行矩阵迭代运算，可获得系统的最低阶固有振型和最低阶固有频率。

在求解高阶形态之前，我们先引证一下正交性条件。

对于 i 阶形态，由(3.22)式，有

$$\omega_i^2[K]^{-1}[M]\{q\}_i = \{q\}_i \tag{3-24}$$

对于 j 阶形态，同样有

$$\omega_j^2[K]^{-1}[M]\{q\}_j = \{q\}_j \tag{3-25}$$

(3-24)式的两边乘以$\lfloor q \rfloor_j[K]$

$$\omega_i^2\lfloor q \rfloor_j[M]\{q\}_i = \lfloor q \rfloor_j[K]\{q\}_i \tag{3-26}$$

(3-25)式的两边乘以$\lfloor q \rfloor_i[K]$

$$\omega_j^2\lfloor q \rfloor_i[M]\{q\}_j = \lfloor q \rfloor_i[K]\{q\}_j \tag{3-27}$$

由于$[M]$，$[K]$都是对称矩阵，将(3-27)式两边的矩阵进行转置，再与(3-26)式相减，得到

$$\omega_i^2\lfloor q \rfloor_j[M]\{q\}_i - \omega_j^2\lfloor q \rfloor_j[M]\{q\}_i = \lfloor q \rfloor_j[K]\lfloor q \rfloor_i - \lfloor q \rfloor_j[K]\{q\}_i$$

即

$$(\omega_i^2-\omega_j^2)\lfloor q\rfloor_j[M]\{q\}_i=0 \tag{3-28}$$

当 $i\neq j$ 时，$\omega_i\neq\omega_j$，则

$$\lfloor q\rfloor_j[M]\{q\}_i=0 \tag{3-29}$$

(3-29)式就是我们所求的正交性条件。

现在，我们再来计算高阶形态。

由

$$[U]_1\{q\}_1=\frac{1}{\omega_1^2}\{q\}_1 \tag{3-30}$$

求得的$\{q\}_1$ 和 ω_1^2，用来写出

$$[U]_2=[U]_1-\frac{\{q\}_1\lfloor q\rfloor_1[M]}{\omega_1^2\lfloor q\rfloor_1[M]\{q\}_1} \tag{3-31}$$

于是

$$[U]_2\{q\}_1=[U]_1\{q\}_1-\frac{\{q\}_1\lfloor q\rfloor_1[M]\{q\}_1}{\omega_1^2\lfloor q\rfloor_1[M]\{q\}_1}$$

$$=[U]_1\{q\}_1-\frac{\{q\}_1}{\omega_1^2}=0 \tag{3-32}$$

这样，用$[U]_2$ 得不到解。说明$[U]_1$ 在$[U]_2$ 中具有无限大的频率。

而

$$[U]_2\{q\}_2=[U]_1\{q\}_2-\frac{\{q\}_1\lfloor q\rfloor_1[M]\{q\}_2}{\omega_1^2\lfloor q\rfloor_1[M]\{q\}_1}$$

$$=[U]_1\{q\}_2=\frac{1}{\omega_2^2}\{q\}_2 \tag{3-33}$$

这样用$[U]_2$ 求得的$\{q\}_2$ 及其对应的频率 ω_2，就是第二阶形态和第二阶频率。

为了求得第三阶形态，此时的动力矩阵为

$$[U]_3=[U]_2-\frac{\{q\}_2\lfloor q\rfloor_2[M]}{\omega_2^2\lfloor q\rfloor_2[M]\{q\}_2} \tag{3-34}$$

对$[U]_3$ 作迭代运算，收敛于第三阶形态。

用同样的方法，可算出其他形态和频率。

通常，为了方便起见，对所求得的振型值进行正规化处理，即用其中某一点的振型值去除其余各点的振型值，此时，该点的振型值在正规化后变为1，而其他各点的振型值在正规化后变为小于1（或者大于1）的数值。这种振型称为正规化振型。由此可知，系统的振动形态仅表示系统各点振幅的相对量，而非各点振幅的绝对值。

§2. 结构分析(有限元法)

为了取得振动分析的结构刚度矩阵，需对结构进行刚度分析计算。

对于像小展弦比板状机翼和升力面，在结构上是由许多单个的梁和肋或者整体坐板用螺钉、铆钉或者焊接成的。分析时把连续结构化为许多的分块元，它们仅在离散的节点处连结，其相互作用理解为力以及弯矩和扭矩，不同结构元件的弹性特性分别用初等梁理论表示。若整个结构是静定的，则基本方程式属静力学，由力和力矩的平衡条件，便可求得节点处的全部力和力矩；对于静不定系统，平衡方程式的数目就不够了，在计算中必须列出附加的相容条件。另外，平衡方程式可以表示为位移形式，且往往具有足够的方程式数目，由此便可确定未知的位移(弯曲和扭转)。这两个方法就是人们所熟悉的力法和位移法。由于篇幅的限制，在此不予多述，读者可参阅有关文献[2]~[5]。

近年来，结构分析的离散法发展了一种“有限元法”，特别是结合高速计算机求解，可方便地应用于工程实际，显示了广阔的前景。

有限元法的基本思想就是把一个连续的弹性体变成一个离散的系统。该系统由若干个有限大小的元件仅在若干个节点处相互联系

而组成。这些有限大小的元件简称为有限元。用完全的矩阵形式表示相互联系的不同元件的弹性特性作为数学上的代换模型，使结构理想化。同时，元件刚度矩阵可按弹性理论的原则加在整个系统的总刚度矩阵上去。整个系统的理想化程度以及计算结果的好坏取决于是否选取了最恰当的有限元。常用的有限元有杆元、梁元、三角形薄膜元、矩形薄膜元、三角形板元、矩形板元、剪切板元、四面体元等。图 3-1 所示的硬壳式结构(例如机身头部)用一系列的三角形板元理想化。图 3-2 表示用不同的元，例如杆、薄片、板以及体积元代替飞机尾翼的例子。图 3-3 表示航天飞机在计算机上用结构有限元法所作的图形。

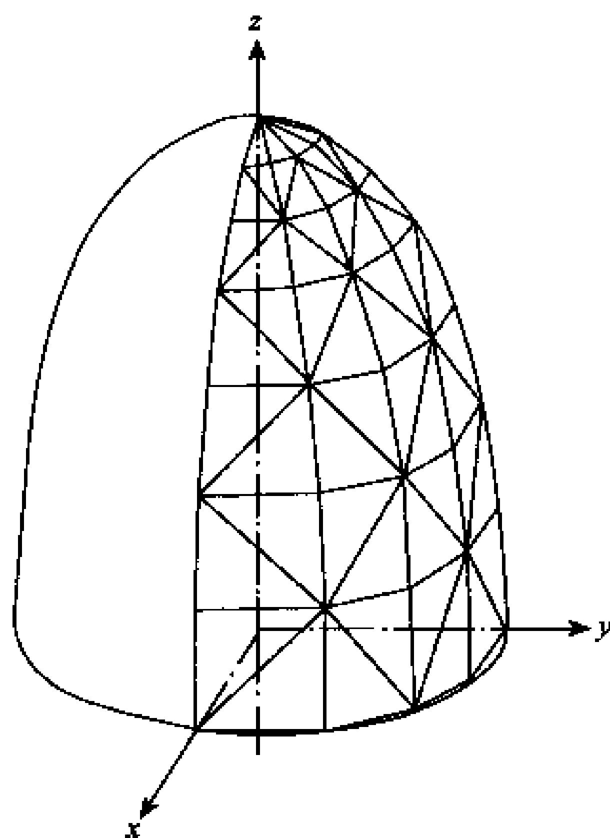


图 3-1　硬壳式结构的理想化模型

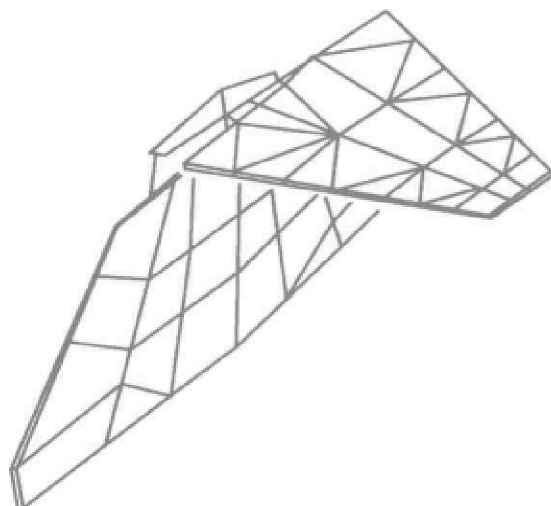


图 3-2　一个飞机尾翼的理想化模型

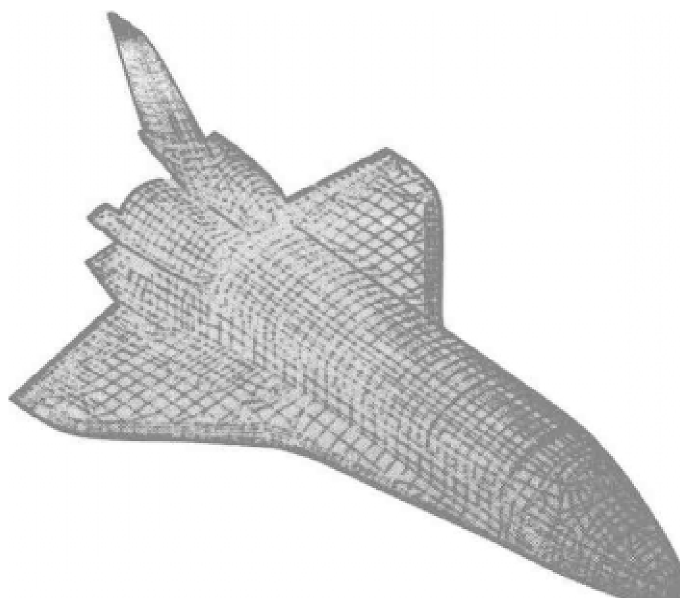


图 3-3　航天飞机的有限元图形

结构分析的有限元法，包括三个基本阶段：(1)结构的理想化；(2)元素的确定；(3)理想化结构的求解。

用有限元法确定整个系统理想化的刚度特性，首先应当知道各个元件在每一个节点上的弹性特性，则总的刚度矩阵[K]由考虑节

点处的平衡条件和位移相容条件的元件刚度矩阵求得。根据位移法是最合适的。

这里，我们以梁元和三角形元以及矩形元的刚度矩阵作为示例。

对于图 3-4 所示的梁，两端的位移为 u，v，转角为 θ，与此对应，

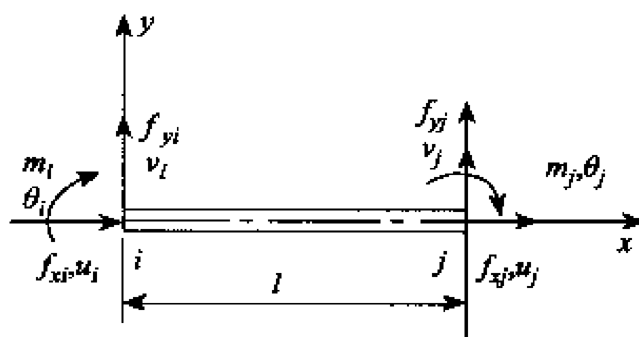


图 3-4　梁元的节点位移和节点力

两端作用有力 f_x、f_y 和弯矩 m。略去推导过程，该梁元的刚度矩阵为

$$[K]=\begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{3-35}$$

其中，F ——梁的横剖面面积；

I ——梁的横剖面惯性矩；

E ——材料的杨氏模量；

l ——梁的长度。

由(3-35)式知，刚度矩阵的一个重要特征是该矩阵元素的对称性。

图 3-5 所示的三角形元的三个顶点(i,j,m)有位移 u,v 以及力

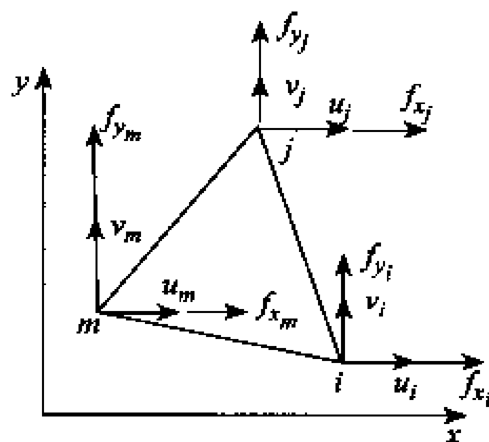


图 3-5 三角形元

f_x,f_y 的作用。略去推导过程，三角形元的刚度矩阵为

$$[K]=\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} \end{bmatrix} \tag{3-36}$$

其中 2×2 阶的子矩阵

$$[K_{rs}] = \frac{E(1-\mu)\tau}{4(1+\mu)(1-2\mu)\Delta} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} c_r c_s & \frac{\mu}{1-\mu} b_r c_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} c_r b_s \\ \frac{\mu}{1-\mu} c_r b_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} b_r b_s \end{bmatrix}$$

$$(r = i, j, m; \quad s = i, j, m) \tag{3-37}$$

以及

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j, b_i = y_j - y_m, c_i = -x_j + x_m \tag{3-38}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \tag{3-39}$$

Δ 为三角形元的面积，τ 为三角形元的厚度，μ 为材料的泊桑比。

对于 x 和 y 向的边长分别为 $2a$ 和 $2b$ 的矩形元（图 3-6），四个

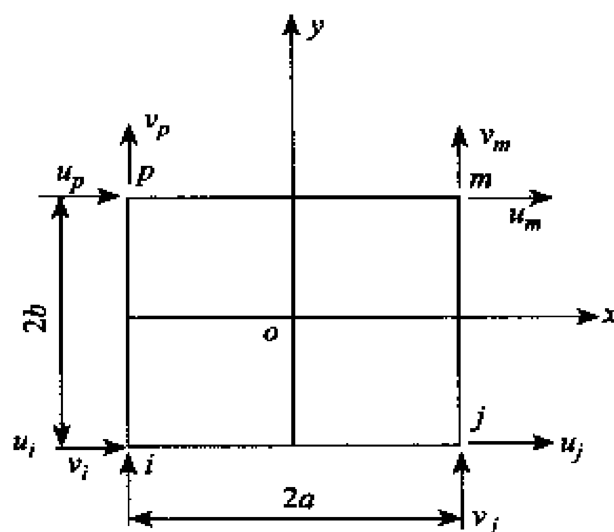


图 3-6　矩形元

节点(i, j, m, p)上的位移为 u, v，刚度矩阵表示为

$$
[K]=\frac{Ec\tau}{de}\cdot
\begin{bmatrix}
\frac{1}{3}\frac{b}{a}+\frac{e}{6c}\frac{a}{b} & & & & & & & \\
\frac{1}{8c} & \frac{1}{3}\frac{a}{b}+\frac{e}{6c}\frac{b}{a} & & & & & & \\
-\frac{1}{3}\frac{b}{a}+\frac{e}{12c}\frac{a}{b} & \frac{f}{8c} & \frac{1}{3}\frac{b}{a}+\frac{e}{6c}\frac{a}{b} & & & & & \\
\frac{f}{8c} & \frac{1}{6}\frac{a}{b}-\frac{e}{6c}\frac{b}{a} & -\frac{1}{8c} & \frac{1}{3}\frac{a}{b}+\frac{e}{6c}\frac{b}{a} & & & & \\
-\frac{1}{6}\frac{b}{a}-\frac{e}{12c}\frac{a}{b} & -\frac{1}{8c} & \frac{1}{6}\frac{b}{a}-\frac{e}{6c}\frac{a}{b} & \frac{f}{8c} & \frac{1}{3}\frac{b}{a}+\frac{e}{6c}\frac{a}{b} & & & \\
-\frac{1}{8c} & -\frac{1}{6}\frac{a}{b}-\frac{e}{12c}\frac{b}{a} & -\frac{f}{8c} & -\frac{1}{3}\frac{a}{b}+\frac{e}{12c}\frac{b}{a} & \frac{1}{8c} & \frac{1}{3}\frac{a}{b}+\frac{e}{6c}\frac{b}{a} & & \\
\frac{1}{6}\frac{b}{a}-\frac{e}{6c}\frac{a}{b} & \frac{f}{8c} & -\frac{1}{6}\frac{b}{a}-\frac{e}{12c}\frac{a}{b} & \frac{1}{8c} & -\frac{1}{3}\frac{b}{a}+\frac{e}{12c}\frac{a}{b} & \frac{f}{8c} & \frac{1}{3}\frac{b}{a}+\frac{e}{6c}\frac{a}{b} & \\
\frac{f}{8c} & -\frac{1}{3}\frac{a}{b}+\frac{e}{12c}\frac{b}{a} & \frac{1}{8c} & -\frac{1}{6}\frac{a}{b}-\frac{e}{12c}\frac{b}{a} & -\frac{f}{8c} & \frac{1}{6}\frac{a}{b}-\frac{e}{6c}\frac{b}{a} & -\frac{1}{8c} & \frac{1}{3}\frac{a}{b}+\frac{e}{6c}\frac{b}{a}
\end{bmatrix}
\qquad (3\text{–}40)
$$

式中，　$1-\mu=c, 1+\mu=d, 1-2\mu=e, 1-4\mu=f$　(3-41)

同样地，τ 为矩形元的厚度，E 和 μ 分别是材料的杨氏模量和泊桑比。

关于上述元件的刚度矩阵的推导可参考文献[6]～[8]。

用计算机进行有限元结构分析已得到了广泛的应用，成为获得结构特性数据的基础。对于像波音-747 这样极其复杂的飞机结构，应用有限元法被证明是成功的。国外业已发展了一种通用有限元计算机程序，可对大型复杂的飞行器结构进行总体分析，计算其变形、翘曲、振动、复特征值、频率响应、瞬态和随机响应等。

取得结构特性数据的另一种方法是地面共振试验。通过它可以测得颤振计算所需要的振型和频率，并可对结构简化的合理性或者质量、刚度数据进行校核。

这里，我们以 45° 三角翼(图 3-7)为例，在文献[9]中对它进行了地面振动试验和刚度影响系数试验。当载荷为 453.6 kg 时，取得了 43×43 阶的柔度影响系数矩阵。文献[10]汇总了该三角翼的理论计算频率和试验频率(系指对称振型)的比较(表 3-1)。图 3-8 表示了五阶振型的比较，其节线位置是一致的。

表 3-1　45°三角翼的振动频率

项　目 ＼ 振　型	1	2	3	4	5
计算频率/(r/s)	43.5	89.6	120.3	161.6	187.3
试验频率/(r/s)	43.3	88.8	122.8	164.2	179.3
$\frac{\text{计算频率}}{\text{试验频率}}$	1.004	1.010	0.981	0.983	1.042

对于超音速飞机、高超音速滑翔器以及导弹，常采用展弦比很小的翼面。这里我们列举 60°镁制平板三角翼模型(图 3-9)和 70°平板

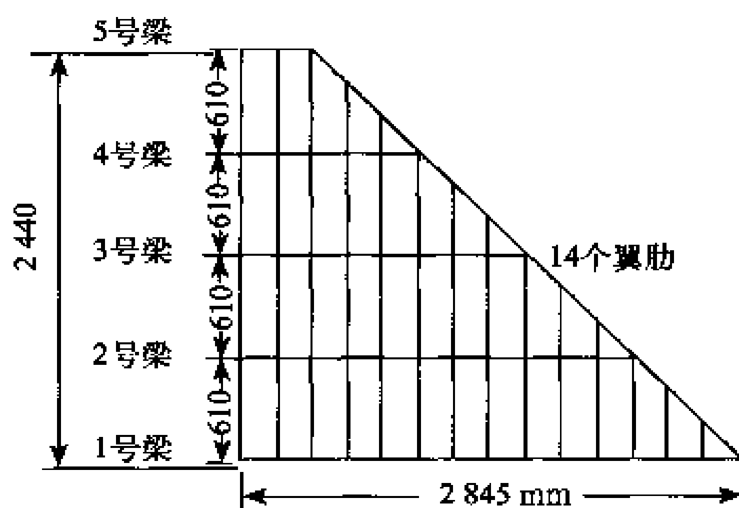


图 3-7　45°三角翼的结构

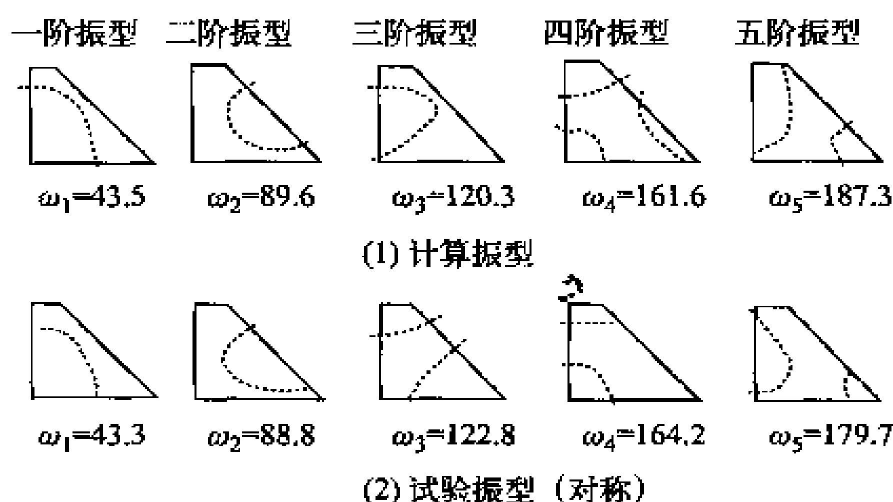
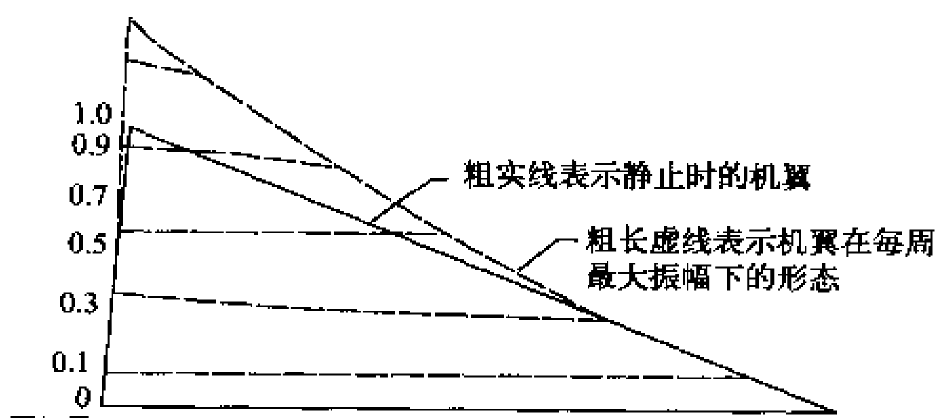


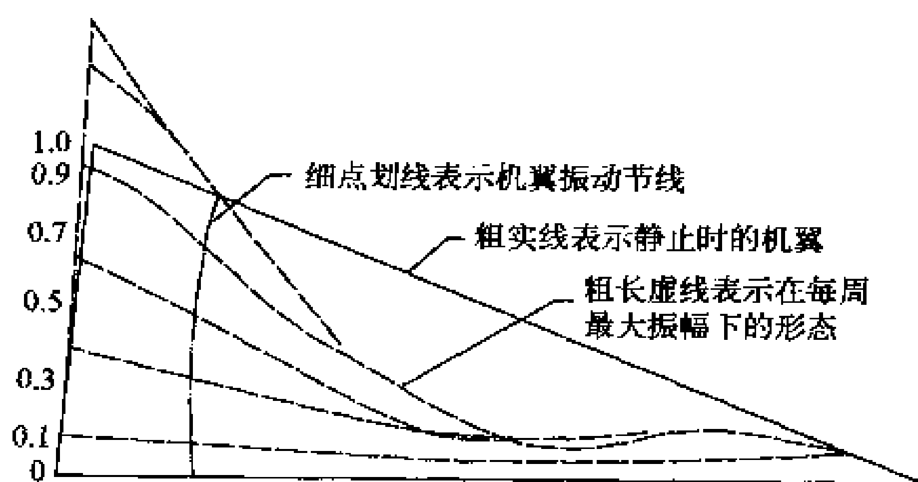
图 3-8　45°三角翼的振型

三角翼模型(图 3-10)的振型图。这些振型图形,有助于建立小展弦比翼面振型的感性认识。

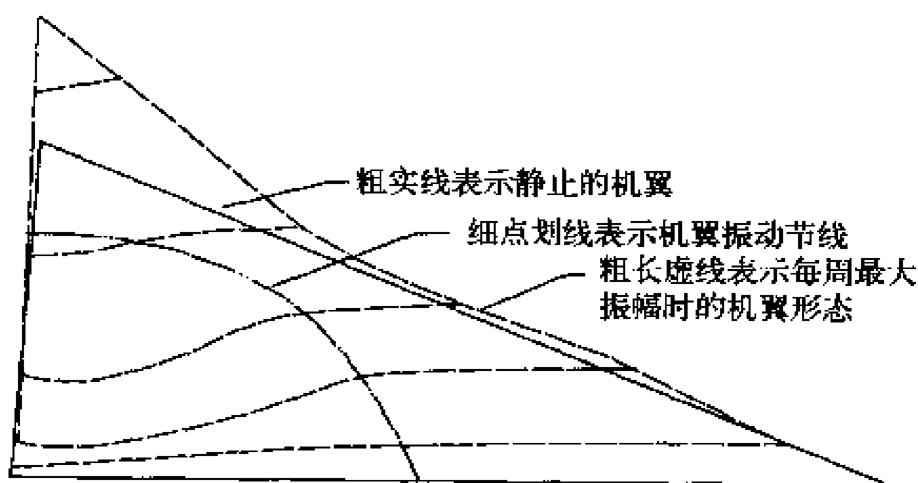
随着振动试验技术和设备的迅速发展,在 20 世纪 50 年代初期出现了多点激振技术。在进行地面振动试验时,采用多点激振系统,适当地分布激振力和选择激振频率,可使飞行器的结构按照固有形



(1) 一阶固有振型 f_1=66r/s



(2) 二阶固有振型 f_2=185r/s



(3) 三阶固有振型 f_3=336 r/s

图 3-9 60°三角翼模型的振型[11]

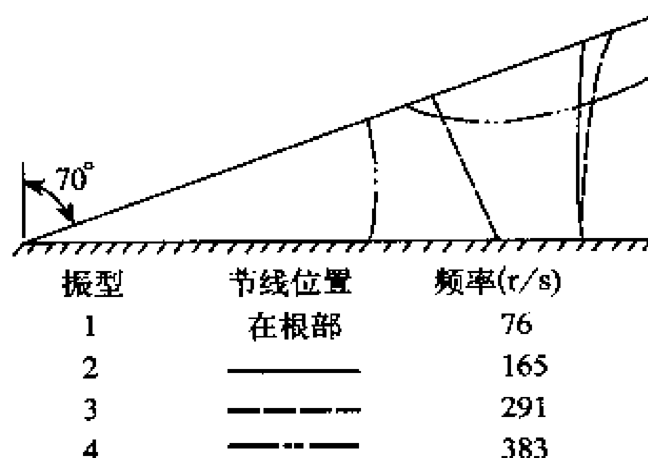


图 3-10　70°三角翼模型的振型[12]

态振动。对于存在阻尼的实际结构，为了维持固有振动，激振力的作用应能抵消结构阻尼。假定激振力具有相同的相位，结构响应必须处处与激振力的相位相差 90°。现在振动试验时，可同时使用几个到几十个激振器，测量用的传感器数目可达几百个。近年来又向自动扫描、自动调力以及自动数据处理的试验技术自动化迈进。目前在试验当中，仍然存在着如何分离两个频率极其相近的振型和振动试验中经常出现的一些非线性问题。

§3. 机体的振动分析方法

以下，我们介绍机身(或弹身)的固有振型和固有频率的计算方法。

由于机身是类似于细长梁的结构，它的弯曲振型与扭转振型可分别进行处理。在颤振分析计算中，往往偏重于机身的弯曲振型。因此，我们在这里介绍三种极易在高速电子计算机上程序化的机身弯曲振型及其频率的计算方法：(1) 影响系数法；(2) 等距差分法；(3) 初参数法。

首先，我们讲述影响系数法。在分析之前，应掌握机体的结构布

局情况，绘制机体的弯曲刚度(EI)的分布图和质量分布(m)图。根据这些曲线图把机体分成 n 段，以等价梁代替原来的机体。等价梁的每一段由该段重心上的集中质量与具有给定的弯曲刚度(EI)值的弹性杆连接而成。

我们以一导弹为例[13]，如图 3-11 所示，把该导弹弹体划分为由

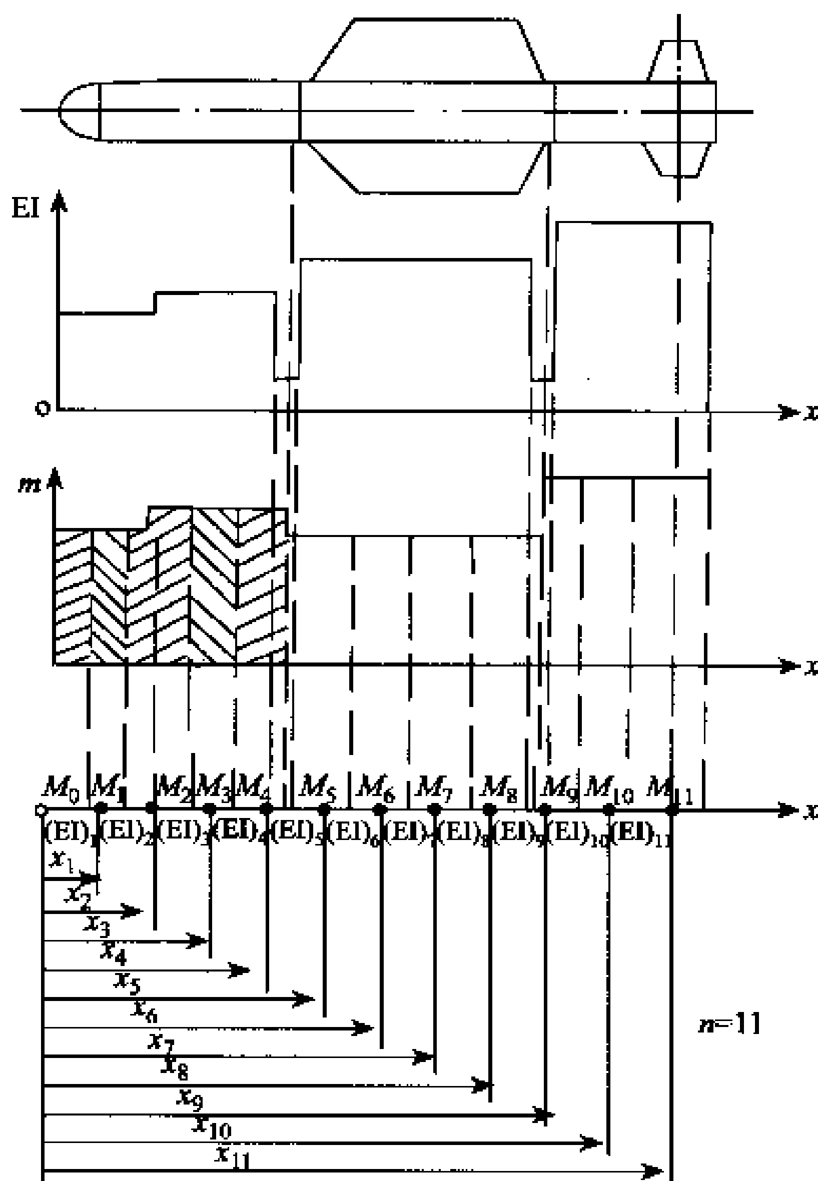


图 3-11 等价梁

若干段组成的等价梁($n=11$)。当 n 值增大时,结果的近似程度增高,但计算量随之倍增。在弯曲刚度(EI)变化的部位和连接处要适当分配集中质量,在力的作用点(如操纵机构作用力)也应分配集中质量,其他的地方则按等价梁的长度近似地均匀分配集中质量。

特征方程式仍与(3-23)式相同,即

$$\lambda\{q\} = [u]\{q\}$$

式中,$\lambda=\dfrac{1}{\omega^2}$称为特征值。

对于两端自由-自由的等价梁,动力矩阵的元素有如下表达式:

$$\left.\begin{aligned}
u_{11} &= M_1 c_{11} + D[(NA_1 - MB_1)x_1 - (QA_1 - NB_1)] \\
u_{21} &= M_1 c_{21} + D[(NA_1 - MB_1)x_2 - (QA_1 - NB_1)] \\
&\vdots \\
u_{n1} &= M_1 c_{n1} + D[(NA_1 - MB_1)x_n - (QA_1 - NB_1)] \\
u_{12} &= M_2 c_{12} + D[(NA_2 - MB_2)x_1 - (QA_2 - NB_2)] \\
u_{22} &= M_2 c_{22} + D[(NA_2 - MB_2)x_2 - (QA_2 - NB_2)] \\
&\vdots \\
u_{n2} &= M_2 c_{n2} + D[(NA_2 - MB_2)x_n - (QA_2 - NB_2)] \\
&\vdots \\
u_{1n} &= M_n c_{1n} + D[(NA_n - MB_n)x_1 - (QA_n - NB_n)] \\
u_{2n} &= M_n c_{2n} + D[(NA_n - MB_n)x_2 - (QA_n - NB_n)] \\
&\vdots \\
u_{nn} &= M_n c_{nn} + D[(NA_n - MB_n)x_n - (QA_n - NB_n)]
\end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}42)$$

其中

$$D = \frac{1}{MQ - N^2} \quad (3\text{-}43)$$

$$M = \sum_{i=0}^{n} M_i \quad (3\text{-}44)$$

——等价梁的总质量(单位:kg · s²/m)。

$$Q = \sum_{i=1}^{n} M_i x_i^2 \tag{3-45}$$

——等价梁相对于计算始点(0)的惯性矩(单位:kg·m·s²)。

$$N = \sum_{i=1}^{n} M_i x_i \tag{3-46}$$

——等价梁相对于计算始点(0)的静矩(单位:kg·s²)。

$$A_i \big|_{i=1}^{n} = (M_1 c_{1i} + M_2 c_{2i} + M_3 c_{3i} + \cdots + M_n c_{ni}) M_i \tag{3-47}$$

$$B_i \big|_{i=1}^{n} = (M_1 x_1 c_{1i} + M_2 x_2 c_{2i} + M_3 x_3 c_{3i} + \cdots + M_n x_n c_{ni}) M_i \tag{3-48}$$

影响系数的元素(单位:m/kg)有如下形式:

(1)自身影响系数

$$c_{ii} = \left\{ \left[L_i^2 x_1 - L_i x_1^2 + \frac{1}{3} x_1^3 \right] \left[\frac{1}{(\mathrm{EI})_1} - \frac{1}{(\mathrm{EI})_2} \right] + \left[L_i^2 x_2 - L_i x_2^2 + \frac{1}{3} x_2^3 \right] \left[\frac{1}{(\mathrm{EI})_2} - \frac{1}{(\mathrm{EI})_3} \right] + \cdots + \left[L_i^2 x_{i-1} - L_i x_{i-1}^2 + \frac{1}{3} x_{i-1}^3 \right] \left[\frac{1}{(\mathrm{EI})_{i-1}} - \frac{1}{(\mathrm{EI})_i} \right] + \frac{L_i^3}{3(\mathrm{EI})_i} \right\} \tag{3-49}$$

(2)相互影响系数($c_{ij} = c_{ji}$)

$$c_{ij} = \left\{ \left[L_j L_i x_1 - \frac{1}{2} L_i x_1^2 - \frac{1}{2} L_j x_1^2 + \frac{1}{3} x_1^3 \right] \left[\frac{1}{(\mathrm{EI})_1} - \frac{1}{(\mathrm{EI})_2} \right] + \left[L_j L_i x_2 - \frac{1}{2} L_i x_2^2 - \frac{1}{2} L_j x_2^2 + \frac{1}{3} x_2^3 \right] \left[\frac{1}{(\mathrm{EI})_2} - \frac{1}{(\mathrm{EI})_3} \right] + \cdots + \left[L_j L_i x_{i-1} - \frac{1}{2} L_i x_{i-1}^2 - \frac{1}{2} L_j x_{i-1}^2 + \frac{1}{3} x_{i-1}^3 \right] \left[\frac{1}{(\mathrm{EI})_{i-1}} - \frac{1}{(\mathrm{EI})_i} \right] + \frac{L_i^2}{(\mathrm{EI})_i} \left[\frac{1}{2} L_j - \frac{1}{6} L_i \right] \right\} \tag{3-50}$$

式中,$x_i = L_i$——点 i 到计算始点(0)的距离($i=1,2,3,\cdots n$,为位移点的编号)。单位:m。

$x_j = L_j$——点 j 到计算始点(0)的距离($j=1,2,3,4,\cdots$为载荷

作用点）。单位：m。且 $j>i$。

将动力矩阵[u]代入(3-23)式进行迭代运算，求得的正规化位移就是第一阶（弯曲）固有振型，对应的第一阶（弯曲）固有频率为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} \quad (\text{rad/s}) \tag{3-51}$$

高阶振型用“消除法”求解。在每次迭代之前，都消除第一阶振型的影响，最后，将收敛到第二阶振型。其余，依次类推。

利用求得的振型，由公式

$$\sum_{i=0}^{n} M_i q_i = (M_0 q_0 + M_1 q_1 + \cdots + M_n q_n) = 0 \tag{3-52}$$

确定起始点的位移量 q_0。

作为一个简单的例子，让我们考察弹体的弯曲刚度(EI)和质量(m)分布如图 3-12 所示的火箭。

1. 计算常数

$$\frac{1}{(\text{EI})_1} = 1.14 \times 10^{-6} (1/\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

$$\frac{1}{(\text{EI})_2} = 0.685 \times 10^{-6} (1/\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

$$\frac{1}{(\text{EI})_3} = 0.855 \times 10^{-6} (1/\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

$$\left[\frac{1}{(\text{EI})_1} - \frac{1}{(\text{EI})_2}\right] = 0.455 \times 10^{-6} (1/\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

$$\left[\frac{1}{(\text{EI})_2} - \frac{1}{(\text{EI})_3}\right] = -0.170 \times 10^{-6} (1/\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

$L_1 = x_1 = 1.27\ \text{m}$, $x_1^2 = 1.613\ \text{m}^2$, $x_1^3 = 2.048\ \text{m}^3$

$L_2 = x_2 = 2.286\ \text{m}$, $x_2^2 = 5.21\ \text{m}^2$, $x_2^3 = 11.92\ \text{m}^3$

$L_3 = x_3 = 3.556\ \text{m}$, $x_3^2 = 12.63\ \text{m}^2$, $x_3^3 = 44.94\ \text{m}^3$

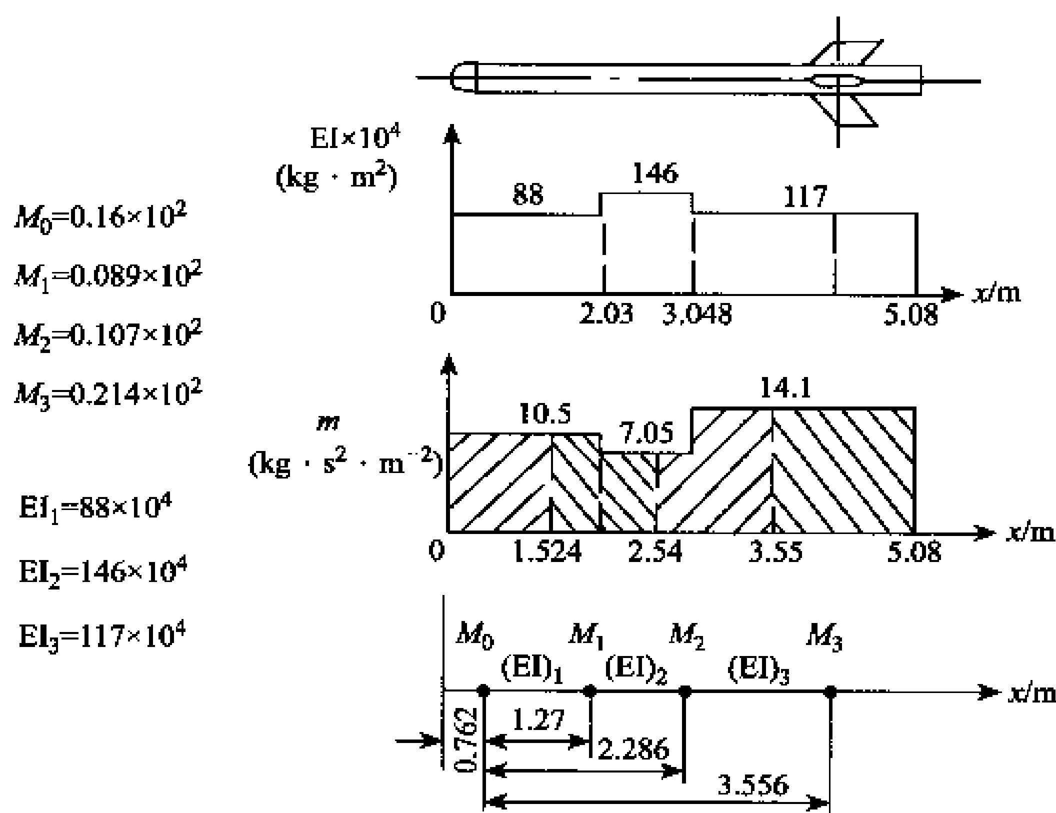


图 3-12　计算模型

2. 计算影响系数

(1) 自身影响系数

$$c_{11}=\frac{L_1^3}{3(\mathrm{EI})_1}=78\times10^{-8}\,\mathrm{m/kg}$$

$$c_{22}=\left[L_2^2x_1-L_2x_1+\frac{x_1^3}{3}\right]\left[\frac{1}{(\mathrm{EI})_1}-\frac{1}{(\mathrm{EI})_2}\right]+\frac{L_2^3}{3(\mathrm{EI})_2}$$

$$=438\times10^{-8}\ \mathrm{m/kg}$$

$$c_{33}=\left[L_3^2x_1-L_3x_1^2+\frac{x_1^3}{3}\right]\left[\frac{1}{(\mathrm{EI})_1}-\frac{1}{(\mathrm{EI})_2}\right]+$$

$$\left[L_3^2x_2-L_3x_2^2+\frac{x_2^3}{3}\right]\left[\frac{1}{(\mathrm{EI})_2}-\frac{1}{(\mathrm{EI})_3}\right]+\frac{L_3^2}{3(\mathrm{EI})_3}$$

$$= 1\ 540 \times 10^{-8}\ \text{m/kg}$$

(2)相互影响系数

按照马克斯威尔的相互性定理，有

$$c_{12} = c_{21}, \quad c_{13} = c_{31}, \quad c_{23} = c_{32}$$

则

$$c_{12} = c_{21} = \left[\frac{L_1^2}{(\text{EI})_1}\right]\left[\frac{L_2}{2} - \frac{L_1}{6}\right] = 170 \times 10^{-8}\ \text{m/kg}$$

$$c_{13} = c_{31} = \left[\frac{L_1^2}{(\text{EI})_1}\right]\left[\frac{L_3}{2} - \frac{L_1}{6}\right] = 288 \times 10^{-8}\ \text{m/kg}$$

$$c_{23} = c_{32} = \left[L_3 L_2 x_1 - \frac{1}{2}L_2 x_1^2 - \frac{1}{2}L_3 x_1^2 + \frac{1}{3}x_1^3\right] \cdot$$

$$\left[\frac{1}{(\text{EI})_1} - \frac{1}{(\text{EI})_2}\right] + \frac{L_2^2}{(\text{EI})_2}\left[\frac{L_3}{2} - \frac{L_2}{6}\right]$$

$$= 628 \times 10^{-8}\ \text{m/kg}$$

3. 计算动力矩阵

$$M = \sum_0^3 M_i = 0.57 \times 10^2\ \text{kg} \cdot \text{s}^2/\text{m}$$

$$Q = \sum_1^3 M_i x_i^2 = 13\ 450\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$$

$$N = \sum_1^3 M_i x_i = 112\ \text{kg} \cdot \text{s}^2$$

$$D = \frac{1}{MQ - N^2} = 1.43 \times 10^{-4} (1/\text{kg}^2 \cdot \text{s}^4)$$

$$A_1 = (M_1 c_{11} + M_2 c_{21} + M_3 c_{31})M_1 = 77.5 \times 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{s}^4/\text{m}$$

$$A_2 = (M_1 c_{12} + M_2 c_{22} + M_3 c_{32})M_2 = 212 \times 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{s}^4/\text{m}$$

$$A_3 = (M_1 c_{13} + M_2 c_{23} + M_3 c_{33})M_3 = 90 \times 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{s}^4/\text{m}$$

$$B_1 = (M_1 x_1 c_{11} + M_2 x_2 c_{21} + M_3 x_3 c_{31})M_1 = 242 \times 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{s}^4$$

$$B_2 = (M_1 x_1 c_{12} + M_2 x_2 c_{22} + M_3 x_3 c_{32})M_2 = 656 \times 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{s}^4$$

$$B_3 = (M_1 x_1 c_{13} + M_2 x_2 c_{23} + M_3 x_3 c_{33})M_3 = 2\ 920 \times 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{s}^4$$

$u_{11}=-15.5\times10^{-7}\ \mathrm{s}^2$

$u_{21}=-8.0\times10^{-7}\ \mathrm{s}^2$

$u_{31}=+3.0\times10^{-7}\ \mathrm{s}^2$

$u_{12}=-50.0\times10^{-7}\ \mathrm{s}^2$

$u_{22}=+35.0\times10^{-7}\ \mathrm{s}^2$

$u_{32}=+2.0\times10^{-7}\ \mathrm{s}^2$

$u_{13}=-335.0\times10^{-7}\ \mathrm{s}^2$

$u_{23}=-538\times10^{-7}\ \mathrm{s}^2$

$u_{33}=+217\times10^{-7}\ \mathrm{s}^2$

将动力矩阵代入特征方程式，即

$$\frac{1}{\omega^2}\begin{Bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\u_{21}&u_{22}&u_{23}\\u_{31}&u_{32}&u_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{Bmatrix}$$

于是，得到

$$\frac{10^7}{\omega^2}\begin{Bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-15.5&-50&-335\\-8&+35&-538\\+3&+2&+217\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{Bmatrix}$$

以系数 u_{23} 对位移正规化

$$q'_1=\frac{-335}{-538}=+0.622$$

$$q'_2=\frac{-538}{-538}=+1.000$$

$$q'_3=\frac{+217}{-538}=-0.403$$

由特征方程式

$$\frac{10^7}{\omega^2}q''_1=-15.5(0.622)+(-50)(1.000)+(-335)(-0.403)=75.5$$

$$\frac{10^7}{\omega^2}q''_2 = -8(0.622)+(35)(1.000)+$$

$$(-538)(-0.403) = 247$$

$$\frac{10^7}{\omega^2}q''_3 = +3(0.622)+(21)(1.000)+$$

$$(217)(-0.403) = -182$$

类似的计算过程可以进行到特征值收敛为止。

表 3-2 汇集了整个计算过程。最后，$\lambda = 210\times10^{-7}$，于是 $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{10^7}{210}} = 218\ \text{rad/s} = 34.7\ \text{r/s}$

表 3-2　火箭模型的振动计算过程

运算次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
q_1	0.622	75.5	0.306	191	0.450	67	0.292	57	0.268	56	0.266
q_2	1.00	247	1.000	424	1.000	230	1.000	213	1.000	210	1.000
q_3	−0.403	−182	−0.737	−157	−0.370	−77	−0.335	−70	−0.328	−68	−0.324
$10^7/\omega^2$			247		424		230		213		210

由 $$(M_0q_0 + M_1q_1 + M_2q_2 + M_3q_3) = 0$$

计算始点的位移值为：

$$q_0 = -\frac{M_1q_1 + M_2q_2 + M_3q_3}{M_0}$$

$$= -\frac{0.089(0.266)+0.107\times1+0.214(-0.324)}{0.16}$$

$$= -\frac{0.0613}{0.16} = -0.384$$

图 3-13 即为该火箭的第一阶(弯曲)固有振型的示意图。

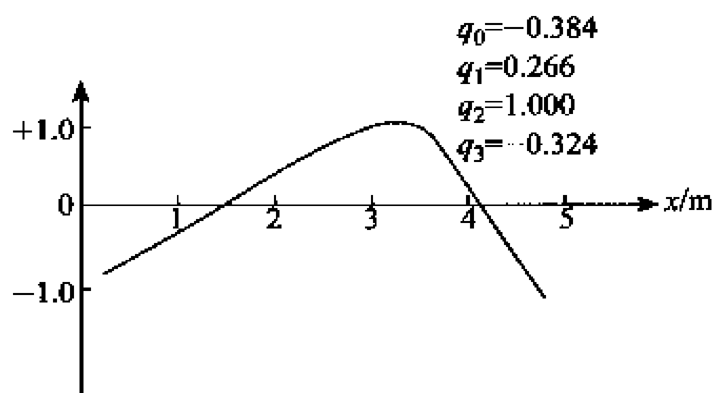


图 3-13 火箭模型的第一阶(弯曲)固有振型

现在,我们介绍“等距差分法”。

它的基本思路是把机体(或弹体)视为一根变质量、变刚度的自由—自由梁。该梁分成若干质量块,在这些质量块的相应位置上具有常值的弯曲刚度和剪切刚度,并考虑了质量惯性矩的影响。假设在特定的时间内,质量保持不变。此时,特征方程式仍可写成如下形式:

$$\lambda\{q\} = [U]\{q\}$$

但是,动力矩阵$[U]$包括了结构刚度参数、转动惯量参数、轴向载荷参数等,即

$$[U] = [[R]^{-1}[F] + [1]]^{-1} \tag{3-53}$$

其中

$$[R] = [H][M] - \beta[D] \tag{3-54}$$

$$[F] = [A][B] + \zeta[N] \tag{3-55}$$

以及 $$[A]=\begin{bmatrix} a_2 & & & & & \\ & a_3 & & & & \\ & & a_4 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a_{r-1} & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{r\times(r-2)} \tag{3-56}$$

$$[B]=\begin{bmatrix} \frac{97}{7} & -\frac{201}{7} & \frac{111}{7} & -1 & & & \\ -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & & \\ & -1 & 16 & -30 & 16 & -1 & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}_{(r-2)\times r} \tag{3-57}$$

$$[H]=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 2 & 1 & & & & \\ 3 & 2 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ r-1 & r-2 & \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & & & 1 \end{bmatrix}_{r\times r} \tag{3-58}$$

$$[M]=\begin{bmatrix} b_1 & & & & \\ & b_2 & & & \\ & & b_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_r \end{bmatrix}_{r\times r} \tag{3-59}$$

$$
[D]=\begin{bmatrix}
-2-\frac{c_2}{2} & 2 & \frac{c_2}{2} & & & & & & \\
-2-c_2 & 2-\frac{c_3}{2} & c_2 & \frac{c_3}{2} & & & & & \\
-2-c_2 & 2-c_3 & c_2-\frac{c_4}{2} & c_3 & \frac{c_4}{2} & & & & \\
-2-c_2 & 2-c_3 & c_2-c_4 & c_3-\frac{c_5}{2} & c_4 & \frac{c_5}{2} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & c_3-c_5 & c_4-\frac{c_6}{2} & c_5 & \cdots & & \\
-2-c_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{r-1}-\frac{c_{r-1}}{2} & c_{r-2} & \frac{c_{r-1}}{2} \\
-2-c_2 & 2-c_3 & c_2-c_4 & c_3-c_5 & \cdots & \cdots & c_{r-2}-2c_r & & c_{r-1}+2c_r \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0
\end{bmatrix}
\tag{3-60}
$$

$$
[N]=\begin{bmatrix}
e_1-1 & 1-e_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
e_1-1 & e_2 & 1-\sum_{i=1}^{2}e_i & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & e_2 & e_3 & 1-\sum_{i=1}^{3}e_i & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & & & & & & \\
e_1-1 & e_2 & e_3 & e_4 & \cdots & e_{r-1} & 1-\sum_{i=1}^{r-1}e_i
\end{bmatrix}_{r\times r}
\tag{3-61}
$$

此外，$\beta = I_{m_1}/2m_1h^2$——转动惯量参数。

$\zeta = 12Th^2/\mathrm{EI}_1$——轴向载荷参数。

T——作用在机体(或弹体)上的总推力。

h——各分点的间距(等距离)。

r——梁的分点数。

$$Q_i = \frac{EI_i}{EI_1} \tag{3-62}$$

—— 第 i 点对第一点的相对弯曲刚度系数。

$$b_i = \frac{m_i}{m_1} \tag{3-63}$$

—— 第 i 点对第一点的相对质量系数。

$$c_i = \frac{I_{m_i}}{I_{m_1}} \tag{3-64}$$

—— 第 i 点对第一点的相对质量惯性矩系数。

$$e_i = \frac{Q_i}{T} \tag{3-65}$$

—— 第 i 点的轴向力与机体(弹体)总推力之比。

将动力矩阵代入(3-23)式,迭代求得的头两个特征值对应于刚体转动和平移运动,不是我们所要求的,应将其去掉。此外,特别应该指出,对于等距差分法,特征方程式中的特征值与上述的不同,即

$$\lambda = \frac{1}{\Omega + 1} \tag{3-66}$$

式中,

$$\Omega = \frac{12m_1\omega^2 h^3}{EI_1} \tag{3-67}$$

ω 就是待求的(弯曲)振动频率。

上面介绍的机体(或弹体)的振动计算方法各有利弊。等距差分法可以计及机体(弹体)的轴向力以及质量惯性矩的影响,但分点必须是等距的。影响系数法是比较简便的方法,分点不受限制,在刚度改变的地方和机体联接处,可以增加分点的数目。但该方法不能考虑轴向力的影响。

一般情况下,若不考虑轴向力的影响,仅计算机体的弯曲振动特性,我们建议采用影响系数方法。只要原始数据取得适当,是能够得到符合工程要求的计算结果的。

对于机身(或弹身)外侧悬挂发动机的情况,在作振动计算时,应

计及发动机的质量和转动惯量的影响。此时，影响系数法和等距差分法已不适用了，须借助于初参数法（或者称为分站推算法）。

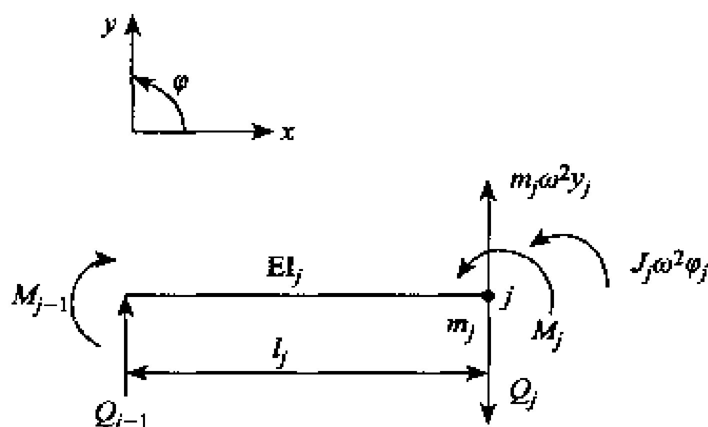


图 3-14 微段分析

初参数法的基本思路：仍把机身（或弹身）作为自由一自由梁，发动机视为具有质量和转动惯量的刚体，与机身（或弹身）以两个接头呈刚性连接。机身（或弹身）当作一根弹性梁，分成 1，2，…$n+1$ 个计算站，集中在各站的质量分别为 m_1，m_2，…m_{n+1}，站与站之间用无质量的弹性杆连接。

现在，我们取一微段进行分析（见图 3-14）。

在 j 端具有集中质量 m_j 和转动惯量 J_j，并作用有惯性力 $m_j\omega^2 y_j$，惯性力矩 $J_j\omega^2\varphi_j$，弯矩 M_j 以及剪力 Q_j。

由梁的弯曲微分方程式，知

$$\begin{Bmatrix} y \\ \varphi \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & l & \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l^3}{6EI}-\dfrac{l}{GF} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{l}{EI} & \dfrac{l^2}{2EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & 0 & -J\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m\omega^2 & 0 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \begin{matrix} y \\ \varphi \\ M \\ Q \end{matrix} \Big\}_{j-1} \\ \cdots \\ \begin{matrix} y \\ \varphi \end{matrix} \Big\}_{j} \end{Bmatrix} \tag{3-68}$$

简写之，即

$$q_j = L_j q_{j-1} \tag{3-69}$$

其中，L 称为传递矩阵，q 称为状态向量。

为方便起见，将长度 l、弯矩刚度 EI、剪切刚度 GF、单位长度上的质量 $\widetilde{m}$、振动频率 ω 等无因次化，即

$$\left.\begin{aligned}
\bar{l} &= l/l_r \\
\overline{\mathrm{EI}} &= \mathrm{EI}/\mathrm{EI}_r \\
\overline{\mathrm{GF}} &= \mathrm{GF}\cdot l_r^2/\mathrm{EI}_r \\
\overline{m} &= m/\widetilde{m}l \\
\bar{\omega}^2 &= \frac{m_r l_r^3}{\mathrm{EI}_r}\omega^2
\end{aligned}\right\} \tag{3-70}$$

其中带下标 r 的量为参考量。

据(3-69)式，由前一站的状态向量 q_{j-1} 乘以该段的传递矩阵 L_j，则得下一站的状态向量 q_j。

由梁在自由端(即计算始点)的边界条件：

$$\begin{aligned}
M_0 &= -J_0\omega^2\varphi_0 \\
Q_0 &= m_0\omega^2 y_0
\end{aligned} \tag{3-71}$$

起始的状态向量为

$$q_0 = \begin{Bmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \\ -J_0\omega^2\varphi_0 \\ m_0\omega^2 y_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -J_0\omega^2 \\ m_0\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \end{Bmatrix} \tag{3-72}$$

于是，起始的传递矩阵

$$L_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -J_0\omega^2 \\ m_0\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3-73}$$

若机身(或弹身)的外面不悬挂发动机等集中质量时，由起始传递矩阵 L_0 按(3-69)式可从机身的头部算到尾部。

当机身(或弹身)的外面悬挂发动机时，可先按上述方法由机身的头部算到发动机的前接头(即 r 站)，得到

$$q_r = L_r L_{r-1} \cdots L_r q_0 \tag{3-74}$$

以下，我们来考察发动机的影响。如上所述，令发动机与机身(或弹身)以两个接头呈刚性连接，则它与机身按同一频率振动。发动机视为具有质量 m 和转动惯量 J 的刚体，因此，只须计及发动机的惯性影响。

发动机在重心处的惯性力(图 3-15)为：

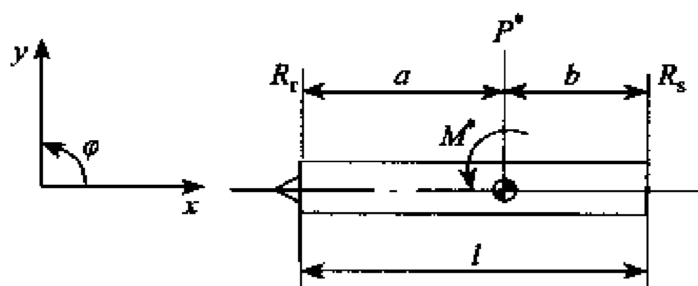


图 3-15　发动机的受力分析

$$P^* = -m\ddot{y}_c^* = m\omega^2 y_c^* = m\omega^2\left(\frac{b}{l}y_r^* + \frac{a}{l}y_s^*\right) \tag{3-75}$$

其中下标 r、s 分别表示前、后接头，l 表示发动机的长度，上标 * 表示发动机的参数。

惯性力矩为

$$M^* = -J\ddot{\varphi}^* = J\omega^2\varphi^* = J\omega^2\left(\frac{y_s^* - y_r^*}{l}\right) \tag{3-76}$$

发动机前、后接头的支反力

$$R_r = P^*\ \frac{b}{l} - \frac{M^*}{l} \tag{3-77}$$

$$R_s = P^*\ \frac{a}{l} - \frac{M^*}{l} \tag{3-78}$$

得(3-75)、(3-76)代入(3-77)、(3-78)式，则

$$R_r = m\left(\frac{b}{l}\right)^2\omega^2 y_r^* + \frac{mab}{l^2}\omega^2 y_s^* - \frac{J}{l^2}\omega^2 y_s^* + \frac{J}{l^2}\omega^2 y_r^*$$

$$=\left(m\frac{b^2}{l^2}+\frac{J}{l^2}\right)\omega^2 y_r^* + \left(\frac{mab}{l^2}-\frac{J}{l^2}\right)\omega^2 y_s^* \tag{3-79}$$

$$R_s = \left(\frac{mab}{l^2}-\frac{J}{l^2}\right)\omega^2 y_r^* + \left(\frac{ma^2}{l^2}+\frac{J}{l^2}\right)\omega^2 y_s^* \tag{3-80}$$

令

$$\left.\begin{aligned} m_{rr} &= \frac{mb^2}{l^2}+\frac{J}{l^2} \\ m_{rs} &= \frac{mab}{l^2}-\frac{J}{l^2} = m_{sr} \\ m_{ss} &= \frac{ma^2}{l^2}+\frac{J}{l^2} \end{aligned}\right\}$$

$$m_{sr} \tag{3-81}$$

则(3-79)和(3-80)式改写为

$$R_r = m_{rr}\omega^2 y_r^* + m_{rs}\omega^2 y_s^* \tag{3-79'}$$

$$R_s = m_{sr}\omega^2 y_r^* + m_{ss}\omega^2 y_s^* \tag{3-80'}$$

由(3-79′)式得

$$y_s^* = \frac{1}{m_{rs}}\left(-m_{rr}y_r^* + \frac{R_r}{\omega^2}\right) \tag{3-82}$$

因设发动机与机身呈刚性连接,则

$$\left.\begin{aligned} y_r^* &= y_r \\ y_s^* &= y_s \end{aligned}\right\} \tag{3-83}$$

对(3-74)式,先加上发动机的前支反力 R_r,把它作为一个未知数,按(3-69)式传递到发动机的后接头(即 s 站),

$$y_s = b_{11}y_0 + b_{12}\varphi_0 + r_1 R_r \tag{3-84}$$

由(3-82)、(3-83)式,得到

$$b_{11}y_0 + b_{12}\varphi_0 + r_1 R_r = \frac{1}{m_{rs}}\left(-m_{rr}y_r + \frac{R_r}{\omega^2}\right)$$

以

$$y_r = a_{11}y_0 + a_{12}\varphi_0$$

代入,则

$$R_r = \frac{\omega^2}{(1 - m_{rs}r_1\omega^2)}\left[(m_{rr}a_{11} + m_{rs}b_{11})y_0 + (m_{rr}a_{12} + m_{rs}b_{12})\varphi_0\right] \tag{3-85}$$

于是

$$\left.\begin{aligned} y_s &= c_{11} y_0 + c_{12} \varphi_0 \\ \varphi_s &= c_{21} y_0 + c_{22} \varphi_0 \\ M_s &= c_{31} y_0 + c_{32} \varphi_0 \end{aligned}\right\} \tag{3-86}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} c_{11} &= b_{11} + \frac{r_1 \omega^2}{(1 - m_{rs} r_1 \omega^2)} (m_{rr} a_{11} + m_{rs} b_{11}) \\ c_{12} &= b_{12} + \frac{r_1 \omega^2}{(1 - m_{rs} r_1 \omega^2)} (m_{rr} a_{12} + m_{rs} b_{12}) \end{aligned}\right\} \tag{3-87}$$

此外，还需求出剪力 Q_s。此时，计及发动机的后支反力 R_s，则

$$\begin{aligned} Q_s &= c_{41} y_0 + c_{42} \varphi_0 + (m_{sr} \omega^2 y_r + m_{ss} \omega^2 y_s) \\ &= [c_{41} + \omega^2 (m_{sr} a_{11} + m_{ss} c_{11})] y_0 + \\ &\quad [c_{42} + \omega^2 (m_{sr} a_{12} + m_{ss} c_{12})] \varphi_0 \end{aligned} \tag{3-88}$$

令

$$\left.\begin{aligned} \Delta c_{41} &= \omega^2 (m_{sr} a_{11} + m_{ss} c_{11}) \\ \Delta c_{42} &= \omega^2 (m_{sr} a_{12} + m_{ss} c_{12}) \end{aligned}\right\} \tag{3-89}$$

因此

$$Q_s = (c_{41} + \Delta c_{41}) y_0 + (c_{42} + \Delta c_{42}) \varphi_0 \tag{3-90}$$

再从发动机的后接头(s 站)继续计算到机身的最后站位，即

$$q = L_n L_{n-1} \cdots L_1 q_0 = D \begin{Bmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \end{Bmatrix} \tag{3-91}$$

其中

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \\ d_{41} & d_{42} \end{bmatrix} \tag{3-92}$$

由边界条件知，在最后的站位上

$$\left.\begin{aligned} M_n &= d_{31} y_0 + d_{32} \varphi_0 = 0 \\ Q_n &= d_{41} y_0 + d_{42} \varphi_0 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-93}$$

当 ω 为机身(或弹身)的固有频率时,(3-93)式的系数行列式应等于零,即

$$\Delta=\begin{bmatrix}d_{31} & d_{32}\\ d_{41} & d_{42}\end{bmatrix}=0 \tag{3-94}$$

所谓初参数法,就是给定一系列的频率 (ω) 值,按上述方法计算 Δ 值,作出 $\Delta-\omega$ 曲线。其中 $\Delta=0$ 的 ω 值,即为所求的机身固有振动频率。在频率值求出后,通常令 $y_0=1$,而

$$\varphi_0=-\frac{d_{31}}{d_{32}}=-\frac{d_{41}}{d_{42}} \tag{3-95}$$

于是,可求出机身的各计算站的振型值。

第四章　非定常气动力理论

成功的颤振分析在很大程度上取决于准确地确定升力面上的非定常气动力。以前，在二元流方面，许多科学家和研究人员进行了卓有成效的工作。近几十年来，三元流的非定常气动力理论的研究工作也获得了一定的成果。以下我们从空气动力学的基本理论出发，分别介绍亚音速、跨音速、超音速以至高超音速的非定常气动力理论。

§1. 基础知识

设 x,y,z 为固定在空间的笛卡尔直角坐标，u,v,w 为空间上的一点(x,y,z) 在时间 t 的气流速度沿 x,y,z 轴方向的分量。如果不计及气体的粘性，则运动方程式表示为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{4-1}$$

式中，p,ρ 为气体的压力和密度，t 为时间。

若引入

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\tag{4-2}$$

(4-1)式改写为

$$\frac{Dq}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\text{grad}P \tag{4-3}$$

式中，$q = ui + vj + wk$，i,j,k 分别为 x,y,z 轴方向的单位向量。$\frac{D}{Dt}$ 表示气体元素的特性随时间的变化率。

略去推导过程，气体的连续方程式为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \tag{4-4}$$

此外，气体的状态方程式

$$P = R\rho T \tag{4-5}$$

以及绝热条件

$$\frac{P}{P_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^\gamma \tag{4-6}$$

其中，R 称为理想气体常数，对于空气，$R = 286.8\ \text{m}^2/\text{s}^2$，$T$ 为绝对温度，P_∞ 和 ρ_∞ 为标准状态下的压力和密度。$\gamma = c_p/c_v$，为定压比热与定容比热的比值，对于空气 $\gamma = 1.4$。

(4-1)、(4-4)、(4-5)以及(4-6)式就是气体运动的基础方程式。

由(4-5)和(4-6)式，气体音速为

$$a = \sqrt{\frac{\text{d}P}{\text{d}\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT} \tag{4-7}$$

对于空气，音速为

$$a = 20\sqrt{T} \tag{4-8}$$

由(4-8)式可知，音速只与空气的绝对温度有关，而与空气密度等无关。在颤振分析中，通常把 ρ 和 a 视为高度变化因子。

现在，我们引入空气动力学中两个重要的量，即旋涡和环量，分别表示为 $\tilde{\omega}$ 和 Γ。

令 $\widetilde{\omega_x}$，$\widetilde{\omega_y}$，$\widetilde{\omega_z}$ 表示旋涡的分量，定义为

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{\omega_x} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \widetilde{\omega_y} &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \widetilde{\omega_z} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{4-9}$$

于是，得到

$$\frac{\partial \widetilde{\omega_x}}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{\omega_y}}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{\omega_z}}{\partial z} = 0 \tag{4-10}$$

因 $\widetilde{\omega_x}, \widetilde{\omega_y}, \widetilde{\omega_z}$ 是 x, y, z, t 的函数，涡线的方程式为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\widetilde{\omega_x}} = \frac{\mathrm{d}y}{\widetilde{\omega_y}} = \frac{\mathrm{d}z}{\widetilde{\omega_z}} \tag{4-11}$$

对于不可压缩气体，连续方程式为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{4-12}$$

流线定义为

$$\frac{\mathrm{d}x}{u} = \frac{\mathrm{d}y}{v} = \frac{\mathrm{d}z}{w} \tag{4-13}$$

比较(4-10)和(4-12)式，(4-11)和(4-13)式知，不可压缩气体的速度分量 u, v, w 和旋涡分量 $\widetilde{\omega_x}, \widetilde{\omega_y}, \widetilde{\omega_z}$ 是相似的。

在时刻 t，沿气体内的任一闭曲线 c，取速度 q 对 $\mathrm{d}r$ 的积分，定义为环量：

$$\Gamma = \oint_c q\,\mathrm{d}r = \oint_c (u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y + w\,\mathrm{d}z) \tag{4-14}$$

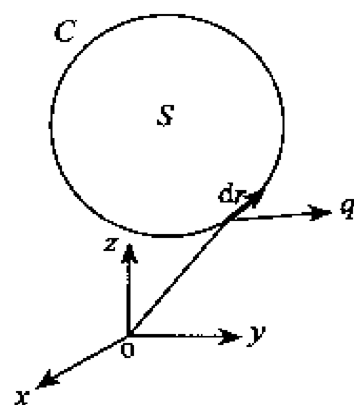


图 4-1 环量的定义图

以图 4-1 表示之，并有下列的斯托克斯定理：

$$\oint_c (u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y + w\,\mathrm{d}z) = \iint_s (\widetilde{\omega_x} l + \widetilde{\omega_y} m + \widetilde{\omega_z} n)\mathrm{d}s \quad (4\text{-}15)$$

(4-15)式的左边表示沿闭曲线 c 的线积分,右边表示周边为 c 的任意曲面 s 上的面积分。其中 l,m,n 为曲面的法线方向余弦。

环量随时间的变化率

$$\begin{aligned}\frac{D\Gamma}{Dt} &= \oint_c \frac{Dq}{Dt}\mathrm{d}r + \oint_c q\,\mathrm{d}q = -\oint_c \left(\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}P\right)\mathrm{d}r + \oint_c \frac{1}{2}\mathrm{d}(q^2) \\ &= -\oint_c \frac{\mathrm{d}P}{\rho} + \oint_c \frac{1}{2}\mathrm{d}(q^2) \qquad (4\text{-}16)\end{aligned}$$

其中,$q^2 = u^2 + v^2 + w^2$,显然(4-16)式的第二项为零,第一项因 P 是 ρ 的单值函数,也等于零,则

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \qquad (4\text{-}17)$$

即环量不随时间变化。

利用旋涡分量 $\widetilde{\omega_x},\widetilde{\omega_y},\widetilde{\omega_z}$,气体的运动方程式(4-1)改写为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + w\widetilde{\omega_y} - v\widetilde{\omega_z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}q^2\right) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\widetilde{\omega_z} - w\widetilde{\omega_x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}q^2\right) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + v\widetilde{\omega_x} - u\widetilde{\omega_y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}q^2\right) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}18)$$

现在,我们考察无旋势流。此时

$$\widetilde{\omega_x} = \widetilde{\omega_y} = \widetilde{\omega_z} = 0$$

即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}19)$$

称为无旋条件。引入速度势 $\Phi(x,y,z,t)$,则

$$
\left.\begin{aligned}
u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\
v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\
w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{4-20}
$$

于是，(4-18)式变为

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + \int \frac{\mathrm{d}P}{\rho}\right] = 0 \\
\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + \int \frac{\mathrm{d}P}{\rho}\right] = 0 \\
\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + \int \frac{\mathrm{d}P}{\rho}\right] = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4-18'}
$$

或者

$$
\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \int \frac{\mathrm{d}P}{\rho} = c(t) \tag{4-21}
$$

当气流沿 x 轴方向以速度 U 运动时，在 $x = -\infty$ 处，$u = U, v = 0, w = 0$ 以及 $P = P_\infty, \rho = \rho_\infty, a = a_\infty$，则(4-21)式可表示为

$$
\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \int_{P_\infty}^{P} \frac{\mathrm{d}P}{\rho} = \frac{1}{2}U^2 \tag{4-22}
$$

由(4-6)式，得到

$$
\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho} = \frac{1}{2}U^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P_\infty}{\rho_\infty} \tag{4-23}
$$

利用当地音速 a 和 $x = -\infty$ 处的音速 a_∞，上式改写为

$$
\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2}U^2 + \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} \tag{4-24}
$$

由连续方程式(4-4)得

$$
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{u}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{v}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{w}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} \tag{4-25}
$$

消去上式右边的 $\frac{\partial \rho}{\partial t}, \frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z}$，整理(4-25)式得到

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-$$

$$\frac{2uv}{a^2}\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-\frac{2vw}{a^2}\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}-\frac{2wu}{a^2}\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}$$

$$=\frac{1}{a^2}\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{2u}{a^2}\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial t}+\frac{2v}{a^2}\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial t}+\frac{2w}{a^2}\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial t} \tag{4-26}$$

(4-20)、(4-24)以及(4-26)式是联系 u,v,w,Φ,a 的方程式，也就是用速度势 Φ 表示的基础方程式。

当气流速度远小于音速时，气体可视为不可压缩的。此时，由于 $u^2,v^2,w^2 \ll a^2$，则(4-26)式变为

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \tag{4-27}$$

即拉普拉斯方程式。

现在，我们引出边界条件。在气体中，物体表面的运动给定为

$$F(x,y,z,t)=0 \tag{4-28}$$

由于气体沿着物体表面运动，在时刻 t，物体表面的点 (x,y,z) 上的一个气体元素，到时刻 $t+\mathrm{d}t$ 移至 $(x+u\mathrm{d}t,y+v\mathrm{d}t,z+w\mathrm{d}t)$，还在物体表面上。于是

$$F(x+u\mathrm{d}t,y+v\mathrm{d}t,z+w\mathrm{d}t,t+\mathrm{d}t)=0 \tag{4-29}$$

对(4-29)式作台劳展开，并与(4-28)式组合，得到

$$\frac{DF}{Dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}+w\frac{\partial F}{\partial z}=0 \tag{4-30}$$

它是物体表面上的边界条件。

对于物体的上、下表面，(4-28)式分别为

$$\left.\begin{aligned} z-z_U(x,y,t)=0 \quad (\text{上表面}) \\ z-z_L(x,y,t)=0 \quad (\text{下表面}) \end{aligned}\right\} \tag{4-31}$$

于是，(4-30)式

$$\left.\begin{aligned}
&\text{对于 } z = z_U,\ w = \frac{\partial z_U}{\partial t} + u\frac{\partial z_U}{\partial x} + v\frac{\partial z_U}{\partial y} \\
&\text{对于 } z = z_L,\ w = \frac{\partial z_L}{\partial t} + u\frac{\partial z_L}{\partial x} + v\frac{\partial z_L}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{4-32}$$

在(4-30)式或(4-32)式的边界条件下，解基础方程式，由于是非线性的，一般说来求解作用在物体表面上的气动力是很困难的。但是，当我们考察在 x,y,z 坐标系的原点附近，几乎位于 xy 平面内的薄翼，它沿 x 方向以均匀速度 U 在气体中运动（见图 4-2）。在作微小运动的情况下，上述的基础方程式和边界条件则可简化。由于运动是微小的，所引起的扰动也是很小的，气体的速度分量表示为

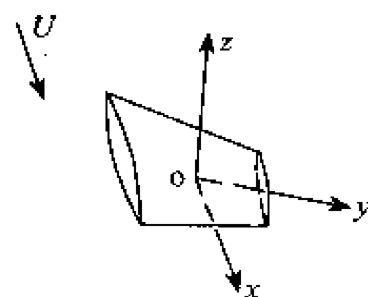


图 4-2　薄翼及其座标系

$$u = u' + U, v, w \tag{4-33}$$

则 $u', v, w \ll U$。

现在，我们引入扰动势 φ。于是

$$\Phi = Ux + \varphi \tag{4-34}$$

则

$$\left.\begin{aligned}
u' &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{4-35}$$

将(4-33)、(4-34)、(4-35)式代入(4-23)和(4-26)式，根据小扰动假设，仅保留一次项，且略去高次项，得到

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{U^2}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{2U}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{4-36}$$

$$Uu' + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{P - P_\infty}{\rho_\infty} = 0 \tag{4-37}$$

若把 $M_\infty = U/a_\infty$ 定义为均匀流的马赫数，则(4-36)式变为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=M_\infty^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{2M_\infty}{a_\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}+\frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (4\text{-}38)$$

在薄翼上，边界条件 $w(x,y,z_U,t)$，$w(x,y,z_L,t)$ 分别以 $w(x,y,0^+,t)$，$w(x,y,0^-,t)$ 近似之。

在机翼上

$$\left.\begin{aligned}
&\text{对于 } z=0^+ \quad w(x,y,0^+)=\lim_{z\to 0^-}\frac{\partial \varphi}{\partial z}=\frac{\partial z_U}{\partial t}+U\frac{\partial z_U}{\partial x}\\
&\text{对于 } z=0 \quad w(x,y,0^-)=\lim_{z\to 0^-}\frac{\partial \varphi}{\partial z}=\frac{\partial z_L}{\partial t}+U\frac{\partial z_L}{\partial x}
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}39)$$

其中，0^+ 表示 $z\to 0$ 极限的正值，0^- 表示 $z\to 0$ 极限的负值。

薄翼的微小运动归结为：在边界条件(4-39)式下求解(4-38)式。由伯努利定理，进而可得到翼面的压差公式：

$$\Delta P = P_U - P_L = -2\rho\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}+U\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \quad (4\text{-}40)$$

§2. 亚音速狭条理论

该理论早在 20 世纪 30 年代就已完善，随后西奥道生(T. Theodorsen)将它用于翼面的颤振分析，被公认为传统的颤振分析方法。

值得指出的是，狭条理论适用于：

(1) 二元或大展弦比机翼；

(2) 亚音速不可压缩流；

(3) 机翼的弦向剖面认为是刚硬的。

由条件(1)知，绕任一剖面的流动是二元的，于是我们只需研究机翼上的一个剖面即可。另外，根据条件(2)，$a\to\infty$，基于小扰动假设，(4-36)式简化为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0 \quad (4\text{-}41)$$

由于上式是线性方程式，扰动速度势可用迭加原理。

扰动速度势是由不考虑环量和考虑环量的两部分组成的。前者与翼剖面的运动状态有关，后者与翼剖面后缘所引起的尾涡有关。下面我们分别对它们进行讨论。

1. 不考虑环量的扰动速度势

我们考察一个带副翼的翼剖面(图 4-3)，其弦长为 2(用半弦长无因次化)。x 轴与气流方向一致，z 轴向上，座标原点位于翼弦中点。

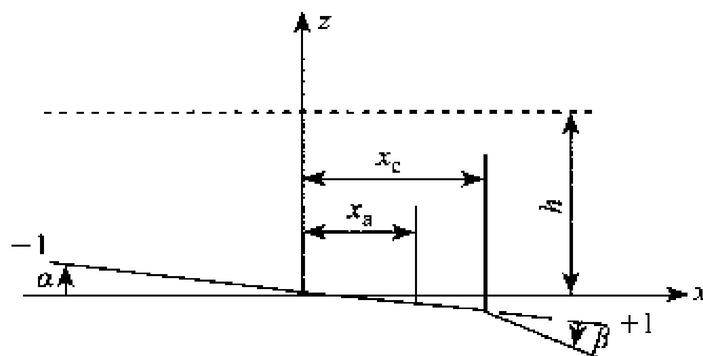


图 4-3 翼型几何

假设副翼缝隙是密封的，且副翼转轴与其前缘重合。图 4-3 上的 x_a 和 x_c 分别表示翼弦中点到弹性轴和副翼转轴的无因次距离。令 h 为参考轴向下的位移，α 为整个翼型的攻角(以前缘向上为正)，β 为相对于未扰动位置的角位移(以向下为正)。

以 z 表示副翼上 x_1 点的垂直位移。对于小位移

$$z = h + (x_1 - x_a)\alpha + (x_1 - x_c)\beta \tag{4-42}$$

在整个翼型上，任意点 x_1 的垂直位移由 $\beta=0$ 给定。翼型的 x_1 点的法向速度为：

$$U_z(x_1) = \dot{h} + (x_1 - x_a)\dot{\alpha} + (x_1 - x_c)\dot{\beta} + U(\alpha + \beta) \tag{4-43}$$

我们在机翼上适当地分布偶极子，在满足边界条件下求扰动速

度势。

由空气动力学知，用圆表示机翼，即在单位圆上分布点泉和点潭，以代替机翼上的分布偶极子，使问题变得很简单。再利用一定的转换关系，将单位圆的问题化成机翼问题。如图 4-4 所示，y 平面和 η 平面之间存在着下列的转换关系：

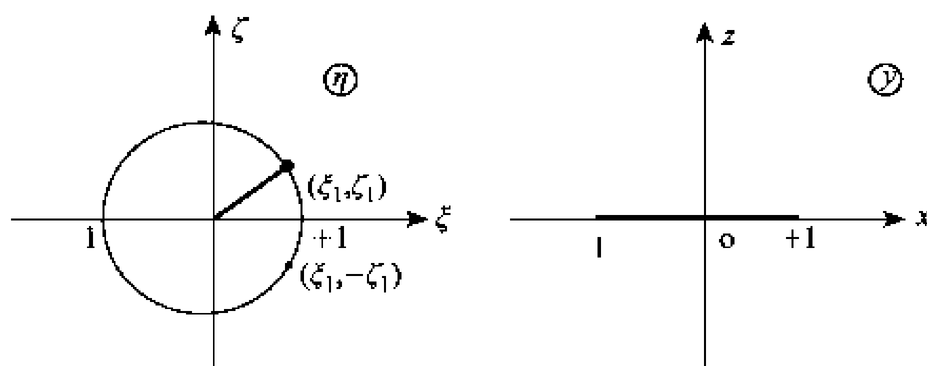


图 4-4　η 平面与 y 平面的对应关系

$$y = \frac{1}{2}\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right) \tag{4-44}$$

上式称为儒可夫斯基变换。

单位圆上的一点 $\eta = e^{i\theta}$，转到 y 平面上，即为 $y = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \cos\theta$，于是

$$\left.\begin{aligned} z &= 0 \\ x &= \cos\theta = \xi \end{aligned}\right\} \tag{4-45}$$

若在 η 平面的单位圆的原点上分布强度为 ε 的点泉，其速度势为

$$\varphi_\eta = \frac{\varepsilon}{4\pi}\ln(\xi^2 + \zeta^2) \tag{4-46}$$

若在 η 平面的点 (ξ_1, ζ_1) 上分布强度为 ε 的点泉，其速度势为

$$\varphi_\eta = \frac{\varepsilon}{4\pi}\ln[(\xi-\xi_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2] \tag{4-47}$$

若在 η 平面的点(ξ,ζ_1)上分布强度为 2ε 的点泉，在点$(\xi,-\zeta_1)$上分布强度为-2ε 的点潭，则

$$\varphi_\eta = \frac{\varepsilon}{2\pi}\ln\frac{(\xi-\xi_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2}{(\xi-\xi_1)^2+(\zeta+\zeta_1)^2} \tag{4-48}$$

η 平面和 y 平面之间的速度关系如图 4-5 所示：

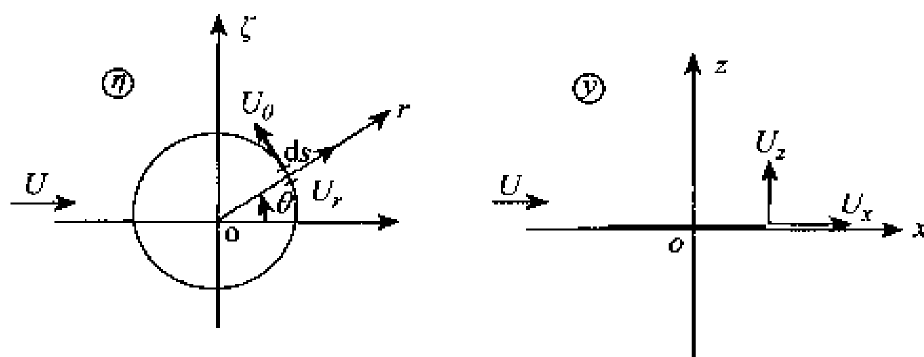


图 4-5　η 平面和 y 平面的速度关系

$$\left.\begin{aligned} U_r &= U_z\sin\theta \\ U_\theta &= -U_x\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{4-49}$$

且 $\varepsilon = U_r$ 和 $U_z = -\beta U$，将 $\varepsilon = -\beta U\sin\theta$ 代入(4-48)式，

$$(\varphi_\eta)_\beta = -\frac{1}{2\pi}\int_{s_1}^{s_2}\beta U\ln\frac{(\xi-\xi_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2}{(\xi-\xi_1)^2+(\zeta+\zeta_1)^2}\sin\theta\mathrm{d}s$$

因 $\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta \quad (r=1)$

$\mathrm{d}s = \mathrm{d}\xi_1/\sin\theta$

于是

$$\begin{aligned}(\varphi_\eta)_\beta &= -\frac{\beta U}{2\pi}\int_{\xi_\beta}^{1}\ln\frac{(\xi-\xi_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2}{(\xi-\xi_1)^2+(\zeta+\zeta_1)^2}\mathrm{d}\xi_1 \\ &= -\frac{\beta U}{\pi}\left[(\xi-\xi_\beta)\ln N' - \sqrt{1-\xi^2}\cos^{-1}\xi_\beta\right]\end{aligned} \tag{4-50}$$

式中

$$N' = \frac{1-\xi\cdot\xi_\beta-\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-\xi_\beta^2}}{\xi-\xi_\beta}$$

利用(4-44)和(4-45)式以及 $\xi_\beta = x_c$，得

$$(\varphi_y)_\beta = \frac{\beta U}{\pi}\left[\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x_c - (x - x_c)\ln N\right] \tag{4-51}$$

式中
$$N = \frac{1 - x_c x - \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-x_c^2}}{x - x_c}$$

为了得到副翼具有角速度(绕副翼转轴)时的速度势 $(\varphi_y)_{\dot\beta}$，将 $\epsilon = -\dot\beta(\xi_1 - \xi_\beta)\sin\theta$ 代入(4-50)式和(4-51)式，得

$$\begin{aligned}(\varphi_\eta)_{\dot\beta} &= \frac{\dot\beta}{2\pi}\int_{\xi_\beta}^{1}\ln\frac{(\xi-\xi_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2}{(\xi-\xi_1)^2+(\zeta+\zeta_1)^2}(\xi_1-\xi_\beta)\mathrm{d}\xi_1\\ &= \frac{\dot\beta}{2\pi}\left[\sqrt{1-\xi_\beta^{\,2}}\ \sqrt{1-\xi^2} + \cos^{-1}\xi_\beta(x - 2\xi_\beta)\ \sqrt{1-\xi^2} -\right.\\ &\quad \left.(x - x_\beta)\ln N\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varphi_y)_{\dot\beta} = \frac{\dot\beta}{2\pi}&\left[\sqrt{1-x_c^2}\ \sqrt{1-x^2} + \cos^{-1}x_c(x-2x_c)\ \sqrt{1-x^2} -\right.\\ &\left.(x-x_c)\ln N\right]\end{aligned} \tag{4-52}$$

(N 同上)。

当整个翼型转动 α 角，以 $x_c = -1$ 代入(4-51)式，得

$$(\varphi_y)_\alpha = \alpha U\sqrt{1-x^2} \tag{4-53}$$

以 $\alpha U = \dot h$ 代入(4-53)式，则得

$$(\varphi_y)_h = \dot h\sqrt{1-x^2} \tag{4-54}$$

最后，讨论机翼以角速度 $\dot\alpha$ 绕参考轴的转动。此时，注意到运动由绕前缘以角速度 $\dot\alpha$ 的转动和以速度 $-\dot\alpha(1+x_a)$ 的垂直位移组成，于是

$$\begin{aligned}(\varphi_y)_{\dot\alpha} &= \frac{\dot\alpha}{2\pi}\pi(x+2)\ \sqrt{1-x^2} - \dot\alpha(1+x_a)\ \sqrt{1-x^2}\\ &= \dot\alpha\left(\frac{1}{2}x + x_a\right)\sqrt{1-x^2}\end{aligned} \tag{4-55}$$

到此为止，求得了与各种运动状态有关的速度势。用 φ_1 表示不考虑环量的总速度势，则

$$\varphi_t = \varphi_\alpha + \varphi_{\dot\alpha} + \varphi_\beta + \varphi_{\dot\beta} + \varphi_h \tag{4-56}$$

2. 考虑环量的扰动速度势

在我们所研究的非定常气流中，机翼上的环量是随时间变化的。根据汤姆生定理

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma = \Gamma_B + \Gamma_C = \text{常数} \\ \text{或 } &\Gamma = \Gamma_B + \Gamma_C = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4-57}$$

若绕机翼的环量 Γ_B（见图 4-6）改变一个微量 $\Delta\Gamma$，则从机翼后缘到无限远处，尾涡的环量引起（$-\Delta\Gamma$）的变化。

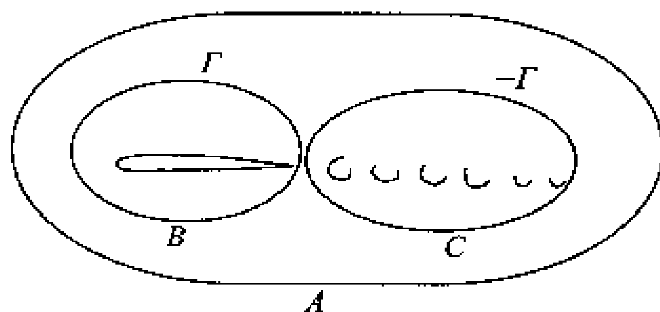


图 4-6 绕机翼的环量变化

与前类似，先研究 η 平面上的问题，再回到 y 平面上来。如图 4-7所示，在 ξ 轴上，$\xi=\xi_1$ 处有强度为（$-\Delta\Gamma$）的旋涡，它对整个流场都要产生影响。在单位圆内的 $\xi=1/\xi_1$ 处有强度为（$+\Delta\Gamma$）的旋涡，则任一点的速度势为

$$\begin{aligned} (\varphi_\eta)_{\Delta\Gamma} &= \frac{\Delta\Gamma}{2\pi}\left[\tan^{-1}\frac{\zeta}{\xi-\xi_1} - \tan^{-1}\frac{\zeta}{\xi_1-\dfrac{1}{\xi_1}}\right] \\ &= \frac{\Delta\Gamma}{2\pi}\tan^{-1}\frac{\left(-\dfrac{1}{\xi_1}+\xi_1\right)\zeta}{\xi^2-\left(\xi_1+\dfrac{1}{\xi_1}\right)+\xi+\zeta^2+1} \end{aligned} \tag{4-58}$$

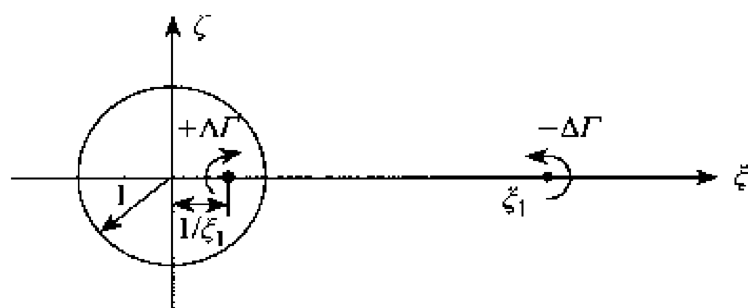


图 4-7 单位圆的旋涡及其影响

利用关系式

$$\xi_1 + \frac{1}{\xi_1} = 2x_1 \tag{4-59}$$

或者

$$\xi_1 = x_1 + \sqrt{x_1^2 - 1}$$

圆平面与机翼平面有着下述的对应关系：

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x \\ \zeta &= \sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{1-x^2} \end{aligned}\right\} \tag{4-60}$$

则

$$(\varphi_y)_{\Delta\Gamma} = -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi}\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}\ \sqrt{x_1^2-1}}{1-xx_1} \tag{4-61}$$

上式是位于 x_1 处的旋涡（强度为 $-\Delta\Gamma$）在 y 平面上所产生的速度势。

以 $\Delta\Gamma=\gamma \mathrm{d}x$ 代入，且旋涡自 $x=1$ 到 $x=\infty$ 沿 x 轴连续分布。由此连续分布的旋涡引起的速度势为：

$$(\varphi_y)_\Gamma = -\frac{1}{2\pi}\int_1^\infty \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}\ \sqrt{x_1^2-1}}{1-xx_1}\gamma \mathrm{d}x_1 \tag{4-62}$$

其中，γ 为旋涡强度分布。

考虑环量和不考虑环量的两部分扰动速度势为

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_\Gamma + \varphi_1 \\ &= \varphi_\Gamma + \varphi_\alpha + \varphi_{\dot\alpha} + \varphi_\beta + \varphi_{\dot\beta} + \varphi_h\end{aligned} \tag{4-63}$$

它应满足儒可夫斯基—库达条件

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_\Gamma + \varphi_\alpha + \varphi_{\dot\alpha} + \varphi_\beta + \varphi_{\dot\beta} + \varphi_h)_{x=1} = \text{有限值} \tag{4-64}$$

将 $\varphi_\Gamma, \varphi_\alpha, \cdots$，代入上式，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_1^\infty \frac{\sqrt{x_1+1}}{\sqrt{x_1-1}}\gamma \mathrm{d}x_1 &= U\alpha + \dot h + \left(\frac{1}{2} - x_a\right)\dot\alpha + \\ &\frac{U\beta}{\pi}\left(\sqrt{1-x_c^2} + \cos^{-1}x_c\right) + \\ &\frac{\dot\beta}{2\pi}\left[\cos^{-1}x_c(1-2x_c) + \sqrt{1-x_c^2}(2-x_c)\right]\end{aligned} \tag{4-65}$$

以扰动速度势 φ 代入(4-40)式，即得作用在翼弦上的升力、俯仰力矩以及副翼的铰链力矩：

$$\left.\begin{aligned}L &= -2\rho\int_{-1}^1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + U\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x \\ M &= -2\rho\int_{-1}^1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + U\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)(x-x_a)\mathrm{d}x \\ T &= -2\rho\int_{-1}^1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + U\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)(x-x_c)\mathrm{d}x\end{aligned}\right\} \tag{4-66}$$

与求速度势的方法一样，气动力也分成不考虑环量和考虑环量两部分。

现在，我们先讨论一下不考虑环量的气动力。要完成(4-66)式的积分，须引进下列 T 函数：

它们是翼型的几何函数。借助于这些

示为：

$$
\left.
\begin{aligned}
&T_1=-\frac{1}{3}\sqrt{1-x_c^2}(2+x_c^2)+x_c\cos^{-1}x_c\\
&T_2=x_c(1-x_c^2)-\sqrt{1-x_c^2}(1+x_c^2)\cos^{-1}x_c+x_c(\cos^{-1}x_c)^2\\
&T_3=-\left(\frac{1}{8}+x_c^2\right)(\cos^{-1}x_c)^2+\frac{1}{4}x_c\sqrt{1-x_c^2}\cos^{-1}x_c(7+2x_c^2)-\\
&\qquad-\frac{1}{8}(1-x_c^2)(5x_c^2+4)\\
&T_4=-\cos^{-1}x_c+x_c\sqrt{1-x_c^2}\\
&T_5=-(1-x_c^2)-(\cos^{-1}x_c)^2+2x_c\sqrt{1-x_c^2}\cos^{-1}x_c\\
&T_6=T_2\\
&T_7=-\left(\frac{1}{8}+x_c^2\right)\cos^{-1}x_c+\frac{1}{8}x_c\sqrt{1-x_c^2}(7+2x_c^2)\\
&T_8=-\frac{1}{3}\sqrt{1-x_c^2}(2x_c^2+1)+x_c\cos^{-1}x_c\\
&T_9=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x_c^2}\right)^3+x_aT_4\right]=\frac{1}{2}(-p+x_aT_4)\\
&\qquad\text{其中}\quad p=-\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x_c^2}\right)^3\\
&T_{10}=\sqrt{1-x_c^2}+\cos^{-1}x_c\\
&T_{11}=\cos^{-1}x_c(1-2x_c)+\sqrt{1-x_c^2}(2-x_c)\\
&T_{12}=\sqrt{1-x_c^2}(2+x_c)-\cos^{-1}x_c(2x_c+1)\\
&T_{13}=\frac{1}{2}[-T_7-(x_c-x_a)T_1]\\
&T_{14}=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}x_ax_c
\end{aligned}
\right\}\qquad(4\text{-}67)
$$

它们是翼型的几何函数。借助于这些 T 函数，(4-66)式可表示为：

$$
\left.\begin{aligned}
L &= -\rho[U\pi\dot{\alpha} + \pi\ddot{h} - \pi x_a\ddot{\alpha} - UT_4\dot{\beta} - T_1\ddot{\beta}] \\
M &= -\rho[-\pi U^2\alpha + \pi\left(\frac{1}{8} + x_a^2\right)\ddot{\alpha} + U^2 T_4\beta + \\
&\quad \{T_1 - T_8 - (x_c - x_a)T_4\}b\dot{\beta}U + \\
&\quad \{-T_7 - (x_c - x_a)T_{11}\}\ddot{\beta} - x_a\pi\ddot{h} - \pi U\dot{h}] \\
T &= -\rho[U^2 T_4\alpha - (2T_9 + T_1)U\dot{\alpha} + 2T_{13}\dot{\alpha} + \frac{1}{\pi}T_5U^2\beta + \\
&\quad \left(\frac{1}{\pi}T_2 - \frac{1}{\pi}T_6\right)U\dot{\beta} - \frac{1}{\pi}T_3\ddot{\beta} + T_4U\dot{h} - T_1\ddot{h}
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}68)
$$

下面，我们再考察有环量时作用在机翼上的气动力。(4-61)式给出了由 x_1 处的旋涡($-\Delta\Gamma$)引起的绕翼型的顺时针环量。此时，旋涡($-\Delta\Gamma$)以速度 U 沿 x 轴方向运动。

$$
\frac{\partial\varphi_{\Delta\Gamma}}{\partial t} = U\frac{\partial\varphi_{\Delta\Gamma}}{\partial x_1}
$$

而

$$
\frac{\partial\varphi_{\Delta\Gamma}}{\partial x} = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi}\sqrt{x_1^2 - 1}\,\frac{\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}(1 - xx_1)} + \dfrac{x_1\sqrt{1-x^2}}{(1-xx_1)^2}}{1 + \dfrac{(1-x^2)(x_1^2-1)}{(1-xx_1)^2}}
$$

$$
= \frac{\Delta\Gamma}{2\pi}\frac{\sqrt{x_1^2-1}}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{(x_1 - x)}
$$

$$
\frac{\partial\varphi_{\Delta\Gamma}}{\partial x_1} = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi}\,\frac{\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{x_1}{(1-xx_1)\sqrt{x_1^2-1}} + \dfrac{x\sqrt{x_1^2-1}}{(1-xx_1)^2}}{1 + \dfrac{(1-x^2)\,(x_1^2-1)}{(1-xx_1)^2}}
$$

$$
= \frac{\Delta\Gamma}{2\pi}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x_1^2-1}}\frac{1}{(x_1 - x)}
$$

两式相加，得

$$
\frac{\partial\varphi_{\Delta\Gamma}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{\Delta\Gamma}}{\partial x_1} = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi}\frac{x_1 + x}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{x_1^2-1}}
$$

为求作用在副翼上的力，须完成如下积分

$$\int_{x_c}^{1}\left(\frac{\partial\varphi_{\Delta\Gamma}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{\Delta\Gamma}}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x=\frac{\Delta\Gamma}{2\pi}\int_{x_c}^{1}\frac{x_1+x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{x_1^2-1}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\Delta\Gamma}{2\pi}\left[\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}}\cos^{-1}x+\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x_1^2-1}}\right]_{x_c}^{1}$$

$$=-\frac{\Delta\Gamma}{2\pi}\left[\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}}\cos^{-1}x_c+\frac{\sqrt{1-x_c^2}}{\sqrt{x_1^2-1}}\right]$$

于是，作用在副翼上的力：

$$\Delta L_{x_{c_1}}=-\rho U\frac{\Delta\Gamma}{2\pi}\left[\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}}\cos^{-1}x_c\ \frac{\sqrt{1-x_c^2}}{\sqrt{x_1^2-1}}\right]$$

将 $\Delta\Gamma=\gamma\mathrm{d}x_1$ 代入，并积分，得

$$L_{x_{c_1}}=-\frac{\rho U}{\pi}\left[(\cos^{-1}x_c-\sqrt{1-x_c^2})\int_1^{\infty}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}}\gamma\mathrm{d}x_1+\right.$$

$$\left.\sqrt{1-x_c^2}\int_1^{\infty}\sqrt{\frac{x_1+1}{x_1-1}}\gamma\mathrm{d}x_1\right] \tag{4-69}$$

若 $x_c=-1$，便得到整个翼型上的力：

$$\left.\begin{aligned}
L&=-\rho U\int_1^{\infty}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}}\gamma\mathrm{d}x_1\\
M&=-\rho U\int_1^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1+1}{x_1-1}}-(x_a+\frac{1}{2})\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}}\right\}\gamma\mathrm{d}x_1\\
T&=-\frac{\rho U}{\pi}\left\{\left[\sqrt{1-x_c^2}(1+\frac{x_c}{2})-\cos^{-1}x_c\cdot(x_c+\frac{1}{2})\right]\cdot\right.\\
&\quad\int_{\infty}^{1}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}}\gamma\mathrm{d}x_1+(\cos^{-1}x_c-x_c\sqrt{1-x_c^2})\cdot\\
&\quad\left.\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\sqrt{\frac{x_1+1}{x_1-1}}\gamma\mathrm{d}x_1\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{4-70}$$

在上式中，令

$$\frac{1}{2\pi}\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x_1+1}}{\sqrt{x_1-1}}\gamma \mathrm{d}x_1 = Q \tag{4-71}$$

则

$$\left.\begin{aligned}
L &= -2\pi\rho UQ\frac{\int_1^{\infty}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}}\gamma \mathrm{d}x_1}{\int_1^{\infty}\sqrt{\frac{x_1+1}{x_1-1}}\gamma \mathrm{d}x_1}\\
M &= -2\pi\rho U\left[\frac{1}{2}-(x_a+\frac{1}{2})\frac{\int_1^{\infty}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}}\gamma \mathrm{d}x_1}{\int_1^{\infty}\sqrt{\frac{x_1+1}{x_1-1}}\gamma \mathrm{d}x_1}\right]Q\\
T &= -2\rho U\left\{\left[\sqrt{1-x_c^2}(1+\frac{x_c}{2})-\cos^{-1}x_c(x_c+\frac{1}{2})\right]\cdot\right.\\
&\left.\frac{\int_1^{\infty}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}}\gamma \mathrm{d}x_1}{\int_1^{\infty}\sqrt{\frac{x_1+1}{x_1-1}}\gamma \mathrm{d}x_1}+\frac{1}{2}[\cos^{-1}x_c-x_c\sqrt{1-x_c^2}]\right\}Q
\end{aligned}\right\} \tag{4-72}$$

设(4-72)式的积分为

$$c=\frac{\int_1^{\infty}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}}\gamma \mathrm{d}x_1}{\int_1^{\infty}\sqrt{\frac{x_1+1}{x_1-1}}\gamma \mathrm{d}x_1} \tag{4-73}$$

则(4-72)式改写为

$$\left.\begin{aligned}
L &= -2\pi\rho UcQ\\
M &= 2\pi\rho U[(x_a+\frac{1}{2})c-\frac{1}{2}]Q\\
T &= -2\rho U\left\{[\sqrt{1-x_c^2}\left(1+\frac{x_c}{2}\right)-\cos^{-1}x_c(x_c+\frac{1}{2})]c+\right.\\
&\left.\frac{1}{2}[\cos^{-1}x_c-x_c\sqrt{1-x_c^2}]\right\}Q\\
&= -\rho U(T_{12}c-T_4)Q
\end{aligned}\right\} \tag{4-74}$$

现在，我们用贝塞尔函数求 c 中的积分。首先，设 $\gamma = \gamma_0 e^{i[k(\frac{s}{b}-x_1)-\psi]}$，其中 $s = Ut$，k 为减缩频率，ψ 为相位差，则

$$c(k) = \frac{\int_1^{\infty} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}} e^{-ikx_1} dx_1}{\int_1^{\infty} \frac{x_1+1}{\sqrt{x_1^2-1}} e^{-ikx_1} dx_1} \tag{4-75}$$

我们知道

$$K_n(u) = \int_0^{\infty} e^{-u\cosh t} \cosh nt \, dt$$

或者
$$K_n(t) = e^{\frac{in\pi}{2}} G_n(it)$$

而
$$G_n(x) = -\bar{Y}_n(x) + [\ln 2 - r + \frac{i\pi}{2}] J_n(x)$$

以及
$$\bar{Y}_n(x) = \frac{\pi}{2} Y_n(x) + [\ln 2 - r] J_n(x)$$

其中，$Y_n(x)$ 为第二类 n 阶牛曼—贝塞尔函数，$J_n(x)$ 为第一类 n 阶贝塞尔函数。于是

$$G_n(x) = -\frac{\pi}{2}[Y_n(x) - iJ_n(x)]$$

我们知道

$$K_0(-ik) = \int_0^{\infty} e^{ik\cosh t} dt = \int_1^{\infty} \frac{e^{ikx_1}}{\sqrt{x_1^2-1}} dx_1$$

或者 $-\frac{\pi}{2} Y_0(k) + i\frac{\pi}{2} J_0(k) = \int_1^{\infty} \frac{\cos kx_1 dx_1}{\sqrt{x_1^2-1}} + i\int_1^{\infty} \frac{\sin kx_1 dx_1}{\sqrt{x_1^2-1}}$

于是
$$\int_1^{\infty} \frac{\cos kx_1 dx_1}{\sqrt{x_1^2-1}} = -\frac{\pi}{2} Y_0(k)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin kx_1 dx_1}{\sqrt{x_1^2-1}} = -\frac{\pi}{2} J_0(k)$$

另外
$$K_1(-ik) = \int_0^{\infty} e^{ik\cosh t} \cosh t \, dt = \int_1^{\infty} \frac{e^{ikx_1} x_1 dx_1}{\sqrt{x_1^2-1}}$$

或者$-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}Y_1(k)-\frac{\pi}{2}J_1(k)=\int_1^{\infty}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}}(\cos kx_1+\mathrm{i}\sin kx_1)\mathrm{d}x_1$

于是

$$\int_1^{\infty}\frac{x_1\cos kx_1}{\sqrt{x_1^2-1}}\mathrm{d}x_1=-\frac{\pi}{2}J_1(k)$$

$$\int_1^{\infty}\frac{x_1\sin kx_1}{\sqrt{x_1^2-1}}\mathrm{d}x_1=-\frac{\pi}{2}Y_1(k)$$

则

$$c(k)=\frac{-\frac{\pi}{2}J_1(k)+\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}Y_1(k)}{-\frac{\pi}{2}J_1(k)-\frac{\pi}{2}Y_0(k)+\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}Y_1(k)-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}J_0(k)}$$

$$=F(k)+\mathrm{i}\,G(k) \tag{4-76}$$

式中$F(k)=\dfrac{J_1(k)[J_1(k)+Y_0(k)]+Y_1(k)[Y_1(k)-J_0(k)]}{[J_1(k)+Y_0(k)]^2+[Y_1(k)-J_0(k)]^2}$

$$G(k)=-\frac{Y_1(k)[J_1(Y)+Y_0(k)]-J_1(k)[Y_1(k)-J_0(k)]}{[J_1(k)+Y_0(k)]^2+[Y_1(k)-J_0(k)]^2}$$

$c(k)$称为西奥道生函数，$F(k)$、$G(k)$分别为西奥道生函数的实部和虚部。它们随减缩频率的变化规律如图 4-8 所示，数值结果列于表 4-1。

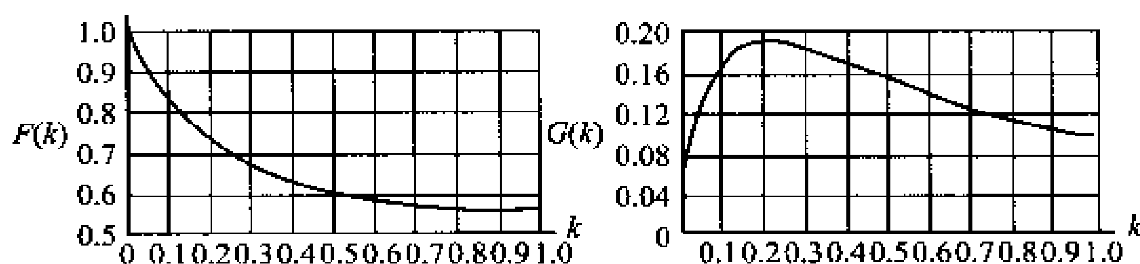


图 4-8　西奥道生函数的实部和虚部随减缩频率的变化曲线

将考虑环量和不考虑环量的两部分气动力加起来，则得作用在翼弦上的总气动力：

表 4-1　西奥道生函数 $c(k)$ 表

k	$F(k)$	$-G(k)$	k	$F(k)$	$-G(k)$	k	$F(k)$	$-G(k)$
0.000	1.000 00	0.000 00	0.48	0.602 59	0.153 47	0.98	0.540 62	0.101 71
0.002	0.996 71	0.012 58	0.50	0.597 93	0.150 71	1.00	0.539 43	0.100 27
0.02	0.963 73	0.075 21	0.52	0.593 59	0.148 00	1.1	0.534 21	0.093 61
0.04	0.926 70	0.116 00	0.54	0.589 53	0.145 35	1.2	0.529 96	0.087 71
0.06	0.892 04	0.142 59	0.56	0.585 72	0.142 77	1.3	0.526 44	0.082 47
0.08	0.860 43	0.160 40	0.58	0.582 15	0.140 24	1.4	0.523 49	0.077 77
0.10	0.831 92	0.172 30	0.60	0.578 80	0.137 79	1.5	0.521 01	0.073 56
0.12	0.806 33	0.180 07	0.62	0.575 65	0.135 39	1.6	0.518 90	0.069 77
0.14	0.783 37	0.184 89	0.64	0.572 69	0.133 05	1.7	0.517 09	0.066 32
0.16	0.762 77	0.187 57	0.66	0.569 89	0.130 78	1.8	0.515 52	0.063 18
0.18	0.744 26	0.188 67	0.68	0.567 25	0.128 57	1.9	0.514 15	0.060 32
0.20	0.727 58	0.188 62	0.70	0.564 76	0.126 42	2.0	0.512 95	0.057 69
0.22	0.712 52	0.187 72	0.72	0.562 40	0.124 33	2.5	0.508 74	0.047 30

续表

k	$F(k)$	$-G(k)$	k	$F(k)$	$-G(k)$	k	$F(k)$	$-G(k)$
0.24	0.698 89	0.186 19	0.74	0.560 17	0.122 29	3.0	0.506 28	0.040 00
0.26	0.686 51	0.184 20	0.76	0.558 06	0.120 31	3.5	0.504 72	0.034 62
0.28	0.675 25	0.181 88	0.78	0.556 05	0.118 38	4.0	0.503 67	0.030 50
0.30	0.664 97	0.179 32	0.80	0.554 15	0.116 60	4.5	0.502 94	0.027 24
0.32	0.655 57	0.176 59	0.82	0.552 34	0.114 68	5.0	0.502 40	0.024 60
0.34	0.646 95	0.173 76	0.84	0.550 62	0.112 90	10	0.500 62	0.012 45
0.36	0.639 02	0.170 86	0.86	0.548 98	0.111 17	20	0.500 16	0.006 25
0.38	0.631 72	0.167 92	0.88	0.547 41	0.109 49	30	0.500 07	0.004 17
0.40	0.624 98	0.164 98	0.90	0.545 93	0.107 85	40	0.500 04	0.003 12
0.42	0.618 74	0.162 06	0.92	0.544 51	0.106 26	50	0.500 03	0.002 50
0.44	0.612 96	0.159 15	0.94	0.543 51	0.104 70	100	0.500 01	0.001 25
0.46	0.607 59	0.156 29	0.96	0.541 86	0.103 19	∞	0.500 00	0.000 00

$$L = -\rho b^2[U\pi\dot{\alpha} + \pi\ddot{h} - \pi b x_a \ddot{\alpha} - UT_4\dot{\beta} - T_1 b\ddot{\beta}] -$$

$$2\pi\rho Ubc(k)[U\alpha + \dot{h} + b(\frac{1}{2} - x_a)\dot{\alpha} +$$

$$\frac{1}{\pi}T_{10}U\beta + \frac{b}{4\pi}T_{11}\dot{\beta}]$$

$$M = -\rho b^2\{\pi(\frac{1}{2} - x_a)Ub\dot{\alpha} + \pi b^2(\frac{1}{8} + x_a^2)\ddot{\alpha} + (T_4 + T_{10})U^2\beta +$$

$$[T_1 - T_8 - (x_c - x_a)T_4 + \frac{1}{2}T_{11}]Ub\dot{\beta} -$$

$$[T_7 + (x_c - x_a)T_1]b^2\ddot{\beta} - x_a\pi b\ddot{h}\} +$$

$$2\rho b^2 U\pi(x_a + \frac{1}{2})c(k)\{U\alpha + \dot{h} + b(\frac{1}{2} - x_a)\dot{\alpha} +$$

$$\frac{1}{\pi}T_{10}U\beta + \frac{b}{2\pi}T_{11}\dot{\beta}\}$$

$$T = -\rho b^2\{[-2T_9 - T_1 + T_4(x_a - \frac{1}{2})]Ub\dot{\alpha} + 2T_{13}b^2\ddot{\alpha} +$$

$$\frac{1}{\pi}U^2\beta(T_5 - T_4T_{10}) - \frac{1}{2\pi}Ub\dot{\beta}T_4T_{11} - \frac{1}{\pi}T_3b^2\ddot{\beta} -$$

$$T_1b\ddot{h}\} - \rho Ub^2T_{12}c(k)\{U\alpha + \dot{h} + b(\frac{1}{2} - x_a)\dot{\alpha} +$$

$$\frac{1}{\pi}T_{10}U\beta + b\frac{1}{2\pi}T_{11}\dot{\beta}\} \tag{4-77}$$

当副翼具有气动力补偿，且缝隙没有密封（图 4-9）时，引入 Φ 函数：

$$\Phi_1(\varphi) = \pi - \varphi + \sin\varphi$$

$$\Phi_2(\varphi) = (\pi - \varphi)(1 + 2\cos\varphi) + \sin\varphi(2 + \cos\varphi)$$

$$\Phi_3(\varphi) = \pi - \varphi + \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

$$\Phi_4(\varphi) = (\pi - \varphi)2\cos\varphi + \sin\varphi \cdot \frac{2}{3}(2 + \cos^2\varphi)$$

$$\Phi_5(\varphi) = \sin\varphi(1 - \cos\varphi)$$

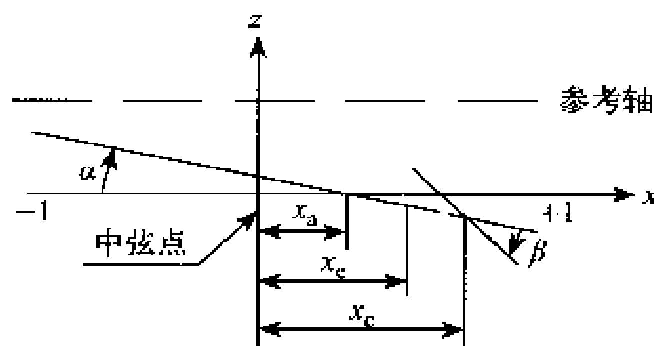


图 4-9　副翼缝隙没有密封的情况

$$\Phi_6(\varphi) = 2(\pi - \varphi) + \sin\varphi \cdot \frac{2}{3}(2 - \cos\varphi)(1 + 2\cos\varphi)$$

$$\Phi_7(\varphi) = (\pi - \varphi)(\frac{1}{2} + 2\cos\varphi) +$$

$$\sin\varphi \cdot \frac{1}{6}(8 + 5\cos\varphi - 4\cos^2\varphi - 2\cos^3\varphi)$$

$$\Phi_8(\varphi) = (\pi - \varphi)(-1 + 2\cos\varphi) + \sin\varphi(2 - \cos\varphi)$$

$$\Phi_9(\varphi) = (\pi - \varphi)(1 + 2\cos\varphi) + \sin\varphi \cdot \frac{1}{3}(2 + 3\cos\varphi + 4\cos^2\varphi)$$

$$\Phi_{10}(\varphi) = \Phi_{31}(\varphi) \cdot \Phi_5(\varphi)$$

$$\Phi_{11}(\varphi) = \Phi_2(\varphi) \cdot \Phi_3(\varphi)$$

$$\Phi_{12}(\varphi) = (\pi - \varphi)^2(\frac{1}{2} + 4\cos^2\varphi) +$$

$$(\pi - \varphi)\sin\varphi \cdot \cos\varphi(7 + 2\cos^2\varphi) + \sin^2\varphi(2 + \frac{5}{2}\cos^2\varphi)$$

$$\Phi_{13}(\varphi) = \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$$

$$\Phi_{14}(\varphi) = 2\sin\varphi$$

$$\Phi_{15}(\varphi) = \Phi_{13}(\varphi) - \Phi_{14}(\varphi)$$

$$\Phi_{16}(\varphi) = \Phi_1(\varphi) \cdot \Phi_{14}(\varphi) = 2\Phi_1(\varphi)\sin\varphi$$

$$\Phi_{17}(\varphi) = [\Phi_3(\varphi)]^2 + \sin^4\varphi$$

$$\Phi_{18}(\varphi) = -\Phi_{13}(\varphi)[(\pi-\varphi)(1+2\cos\varphi) - \sin\varphi \cdot \cos\varphi]$$

$$\Phi_{19}(\varphi) = \frac{1}{2}\Phi_3(\varphi)\Phi_{14}(\varphi) = \Phi_3(\varphi)\sin\varphi$$

$$\Phi_{20}(\varphi) = \sin\varphi(1+\cos\varphi)$$

$$\Phi_{21}(\varphi) = -2(\cos\varphi + \ln\sin^2\varphi)$$

……

$$\Phi_{31}(\varphi) = \pi - \varphi - \sin\varphi$$

$$\Phi_{32}(\varphi) = \pi - \varphi + \sin\varphi(1+2\cos\varphi)$$

$$\Phi_{35}(\varphi) = 2\sin^2\varphi$$

$$\Phi_{36}(\varphi) = \Phi_{32}(\varphi)\cdot\Phi_3(\varphi) + 2\sin^4\varphi$$

$$\Phi_{37}(\varphi) = \Phi_3(\varphi)[\Phi_2(\varphi) - \Phi_3(\varphi)] \tag{4-78}$$

其中，$x=-\cos\varphi$ 为副翼前缘，$\varphi=0$ 为机翼前缘，$\varphi=\pi$ 为副翼或者机翼后缘。

此时，翼型的升力、绕参考轴的俯仰力矩以及副翼的铰链力矩表示为：

$$L = \pi\rho b^3\Big\{-\frac{\ddot{h}}{b} - \frac{2U}{b}c(k)\frac{\dot{h}}{b} + x_a\ddot{\alpha} + [2(x_a - \frac{1}{2})c(k) - 1]\frac{U}{b}\dot{\alpha} - \frac{2U^2}{b^2}c(k)\alpha + \Big[\frac{T_1}{\pi} + (x_c - x_e)\frac{\Phi_3}{\pi}\Big]\ddot{\beta} + \Big[\frac{T_4}{\pi} + 2(x_c - x_e)\frac{\Phi_1}{\pi}c(k) - \frac{T_{11}}{\pi}c(k)\Big]\frac{U}{b}\dot{\beta} - \frac{2T_{10}}{\pi}c(k)\frac{U^2}{b^2}\beta\Big\}$$

$$M = \pi\rho b^4\Big\{\frac{x_a}{b}\ddot{h} + \frac{2(\frac{1}{2}+x_a)}{b}c(k)\frac{U}{b}\dot{h} - (\frac{1}{8}+x_a^2)\ddot{\alpha} + [x_a - \frac{1}{2} + 2(\frac{1}{4} - x_a^2)c(k)]\frac{U}{b}\dot{\alpha} + 2(\frac{1}{2}+x_a)c(k)\frac{U^2}{b^2}\alpha + [\frac{T_7}{\pi}(x_e - x_a)\frac{T_1}{\pi} + (x_c - x_e)\frac{\Phi_5}{4\pi} -$$

$$(x_c-x_e)(\frac{1}{2}+x_a)\frac{\Phi_3}{\pi}]\ddot{\beta}+\Big[\frac{2p}{\pi}-(x_a-\frac{1}{2})\frac{T_4}{\pi}+$$

$$(x_c-x_e)\frac{\Phi_5}{\pi}+\Big((\frac{1}{2}+x_a)\frac{T_{11}}{\pi}-$$

$$2(x_c-x_e)(\frac{1}{2}+x_a)\frac{\Phi_1}{\pi}\Big)c(k)\Big]\frac{U}{b}\dot{\beta}+$$

$$\Big[2(\frac{1}{2}+x_a)\frac{T_{10}}{\pi}c(k)-\frac{T_4+T_{10}}{\pi}\Big]\frac{U^2}{b^2}\beta\Big\}$$

$$T=\pi\rho b^4\Big\{[\frac{T_1}{\pi}+(x_c-x_e)\frac{\Phi_3}{\pi}]\frac{\ddot{h}}{b}+[2(x_c-x_e)\frac{\Phi_{31}}{\pi}-\frac{T_{12}}{\pi}]c(k)\frac{U}{b^2}\dot{h}+$$

$$\Big[\frac{T_7}{\pi}+(x_e-x_a)\frac{T_1}{\pi}+(x_c-x_e)\frac{\Phi_6}{4\pi}-(x_c-x_e)(\frac{1}{2}+x_a)\frac{\Phi_3}{\pi}\Big]\ddot{\alpha}+$$

$$\Big[(x_c-x_e)\frac{\Phi_{32}}{\pi}-\frac{2p-2T_1-T_4}{2\pi}+(x_a-\frac{1}{2})\frac{T_{12}}{\pi}c(k)-$$

$$2(x_c-x_e)(x_a-\frac{1}{2})\frac{\Phi_{31}}{\pi}c(k)\Big]\frac{U}{b}\dot{\alpha}+$$

$$[2(x_c-x_e)\frac{\Phi_{31}}{\pi}-\frac{T_{12}}{\pi}]c(k)\frac{U^2}{b^2}\alpha+$$

$$\Big[\frac{T_3}{\pi^2}+(x_c-x_e)\frac{\Phi_{37}}{\pi^2}-(x_c-x_e)^2\frac{\Phi_{17}}{\pi^2}\Big]\ddot{\beta}+$$

$$\Big[\frac{T_4T_{11}}{2\pi^2}+(x_c-x_e)\frac{\Phi_{36}+\Phi_{10}}{\pi^2}-(x_c-x_e)^2\frac{\Phi_{35}}{\pi^2}+$$

$$\Big(-\frac{T_{11}T_{12}}{2\pi^2}+(x_c-x_e)\frac{\Phi_2\Phi_{31}+\Phi_1\Phi_2}{\pi^2}-2(x_c-x_e)^2\frac{\Phi_1\Phi_{31}}{\pi^2}\Big)\cdot$$

$$c(k)\Big]\frac{U}{b}\dot{\beta}+\Big[-\frac{T_5-T_4T_{10}}{\pi^2}+(x_c-x_e)\frac{\Phi_{35}}{\pi^2}+$$

$$\Big(-\frac{T_{10}T_{12}}{\pi^2}+2(x_c-x_e)\frac{\Phi_1\Phi_{31}}{\pi^2}\Big)c(k)\Big]\frac{U^2}{b^2}\beta\Big\} \qquad (4\text{-}79)$$

式中的 p 和 T 函数见(4-67)式。$c(k)$见(4-76)式。

比较(4-77)和(4-79)式知，所不同的在于后者增加了一些带 Φ 函数的项。

当我们所考察的运动是微幅的简谐运动时，即

$$h = h_0 e^{i\omega t}$$

$$\alpha = \alpha_0 e^{i(\omega t + \theta_1)}$$

$$\beta = \beta_0 e^{i(\omega t + \theta_2)} \tag{4-80}$$

其中，h_0，α_0 以及 β_0 分别是机翼弯曲、扭转以及副翼偏转的振幅，θ_1，θ_2 为相位角。

将 $\dot{h} = i\omega h$，$\ddot{h} = -\omega^2 h$ 等代人(4-79) 式，得到单位翼展上的升力、俯仰力矩以及副翼的铰链力矩：

$$L = \pi\rho b^3 \omega^2 \Big\{ L_h \frac{h}{b} + [L_a - (\frac{1}{2} + x_a) L_h]\alpha +$$

$$[L_\beta - (x_c - x_e) L_z]\beta \Big\}$$

$$M = \pi\rho b^4 \omega^2 \Big\{ [M_h - (\frac{1}{2} + x_a)]L_h] \frac{h}{b} +$$

$$[M_a - (\frac{1}{2} + x_a)(L_a + M_h) + (\frac{1}{2} + x_a)^2 L_h]\alpha +$$

$$[M_\beta - (\frac{1}{2} + x_a) L_\beta - (x_c - x_e) M_z +$$

$$(x_c - x_e)(\frac{1}{2} + x_a) L_z]\beta \Big\}$$

$$T = \pi\rho b^4 \omega^2 \{ [T_h - (x_c - x_e) P_h \frac{h}{b} + [T_a - (x_c - x_e) \cdot$$

$$P_a - (\frac{1}{2} + x_a) T_h + (\frac{1}{2} + x_a)(x_c - x_e) P_h]\alpha +$$

$$[T_\beta - (x_c - x_e)(P_\beta + T_z) + (c - e)^3 P_z]\beta \} \tag{4-81}$$

式中　L_h，L_a，L_β 等列写如下：

$$L_h = 1 - 2i \frac{F + iG}{k} = 1 - 2i \frac{F}{k} + 2 \frac{G}{k}$$

$$L_a = \frac{1}{2} - i(\frac{1}{k})[1 + 2(F + iG)] - 2(\frac{1}{k})^2 (F + iG)$$

$$L_\beta = -\frac{T_1}{\pi} + \mathrm{i}(\frac{1}{k})(\frac{T_4}{\pi}) - \mathrm{i}(\frac{1}{k})\frac{T_{11}}{\pi}(F+\mathrm{i}G) -$$

$$2(\frac{1}{k})^2\frac{T_{10}}{\pi}(F+\mathrm{i}G)$$

$$L_z = -2\mathrm{i}(\frac{1}{k})\frac{\Phi_1}{\pi}(F+\mathrm{i}G) + \frac{\Phi_3}{\pi}$$

$$M_h = \frac{1}{2}$$

$$M_\alpha = \frac{3}{8} - \mathrm{i}(\frac{1}{k})$$

$$M_\beta = -\frac{T_1}{\pi} - (x_c + \frac{1}{2})\frac{T_1}{\pi} + \mathrm{i}(\frac{1}{k})(\frac{2p+T_4}{\pi}) - (\frac{1}{k})^2(\frac{T_4+T_{10}}{\pi})$$

$$M_z = -\mathrm{i}(\frac{1}{k})\frac{\Phi_5}{\pi} + \frac{1}{4}\frac{\Phi_6}{\pi}$$

$$T_h = -\frac{T_1}{\pi} - \mathrm{i}(\frac{1}{k})\frac{T_{12}}{\pi}(F+\mathrm{i}G)$$

$$T_\alpha = -\frac{1}{\pi}[T_7 + (x_c + \frac{1}{2})T_1] - \mathrm{i}(\frac{1}{k})(\frac{2p - 2T_1 - T_4}{2\pi}) -$$

$$\mathrm{i}(\frac{1}{k})\frac{T_{12}}{\pi}(F+\mathrm{i}G) - (\frac{1}{k})^2\frac{T_{12}}{\pi}(F+\mathrm{i}G)$$

$$T_\beta = -(\frac{T_3}{\pi^2}) + \mathrm{i}(\frac{1}{k})\frac{T_4T_{11}}{2\pi^2} - \mathrm{i}(\frac{1}{k})(\frac{T_{11}T_{12}}{2\pi^2})(F+\mathrm{i}G) -$$

$$(\frac{1}{k})^2(\frac{T_5 - T_4T_{10}}{\pi^2}) - (\frac{1}{k})^2\frac{T_{10}T_{12}}{\pi^2}(F+\mathrm{i}G)$$

$$T_z = -\mathrm{i}(\frac{1}{k})\frac{\Phi_1\Phi_8}{\pi^2}(F+\mathrm{i}G) - (\frac{1}{k})(\frac{\Phi_{10}}{\pi^2}) + \frac{1}{2}\frac{\Phi_{37}}{\pi^2}$$

$$P_h = -2\mathrm{i}(\frac{1}{k})\frac{\Phi_{31}}{\pi}(F+\mathrm{i}G) + \frac{\Phi_3}{\pi}$$

$$P_\alpha = -2[(\frac{1}{k})^2 + \mathrm{i}(\frac{1}{k})]\frac{\Phi_{31}}{\pi}(F+\mathrm{i}G) - \mathrm{i}(\frac{1}{k})\frac{\Phi_{32}}{\pi} + \frac{1}{4}\frac{\Phi_6}{\pi}$$

$$P_\beta = -\frac{2}{\pi}[(\frac{1}{k})^2\Phi_1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}(\frac{1}{k})\Phi_2]\frac{\Phi_{31}}{\pi}(F+\mathrm{i}G) -$$

$$(\frac{1}{k})^2 \frac{\Phi_{35}}{\pi^2} - \mathrm{i}(\frac{1}{k}) \frac{\Phi_{36}}{\pi^2} + \frac{\Phi_{37}}{2\pi^2}$$

$$P_z = -2\mathrm{i}(\frac{1}{k}) \frac{\Phi_1 \Phi_{31}}{\pi^2}(F + \mathrm{i}\,G) - \mathrm{i}(\frac{1}{k}) \frac{\Phi_{35}}{\pi^2} + \frac{\Phi_{17}}{\pi^2} \tag{4-82}$$

当翼型的几何参数确定以后，L_h, L_α, L_β 等仅为减缩频率 k 的函数，与马赫数无关。对于近代飞机和导弹多采用后掠机翼，为计及后掠效应，通常在 L, M, T 的表达式(4-81) 中引进 $\cos\Lambda$ 作为修正因子(其中 Λ 为机翼的后掠角)。

对于不带副翼的机翼，仅作平移和俯仰运动时，其剖面升力和力矩系数为：

$$\left.\begin{aligned}
L_h &= 1 + 2G/k - \mathrm{i}2F/k \\
L_\alpha &= \frac{1}{2} + (2/k)(G - F/k) - \mathrm{i}(2/k)(\frac{1}{2} + F - G/k) \\
M_h &= \frac{1}{2} \\
M_\alpha &= \frac{3}{8} - \mathrm{i}(1/k)
\end{aligned}\right\} \tag{4-83}$$

§ 3. 亚音速核函数方法

确定亚音速压缩性流中，机翼作简谐振动时的气动力，曾经成了空气动力学的一个重要问题。因为大多数飞机在这一速度区内飞行或者必须飞过这一区域，迫切要求有一个较好地预测非定常气动力的方法，以便能够准确地求得颤振临界速度。在 20 世纪 50 年代前后，世界上不少科学家和研究工作者致力于这一方面的工作，取得了一定的研究成果。如美国发展了一种叫做 NACA(或 NASA)核函数方法[14]，英国航空研究委员会(ARC)的核函数方法[15]以及德国的核函数方法[16]等。这里，我们根据美藉华人徐宝潭在美国航空科学学会召开的关于动力学和气动弹性问题的专家会议上发表的论

文[17]，介绍一种较为简便的核函数方法。该方法适用于：

（1）三元或中、小展弦比机翼；

（2）亚音速压缩性流；

（3）计及翼面的弹性变形。

为了叙述的方便起见，我们分成几个小节。

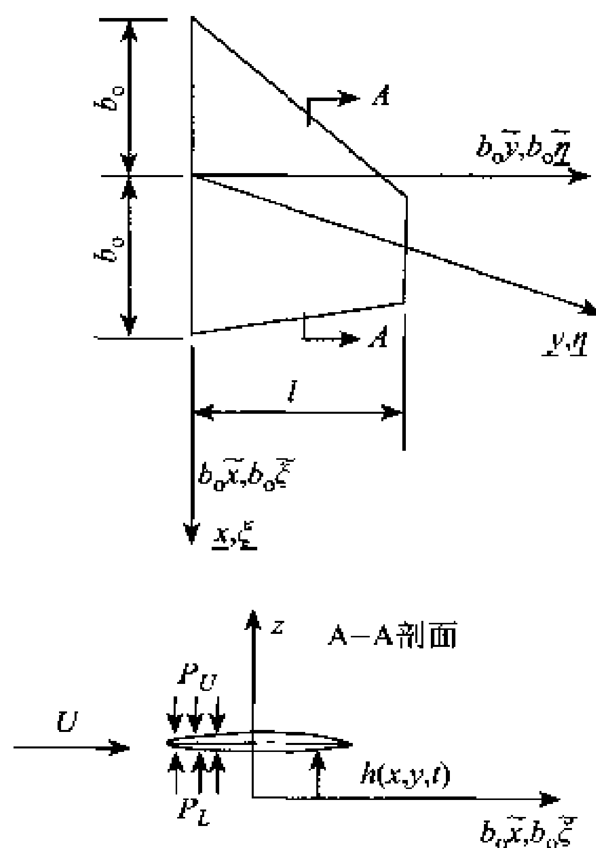


图 4-10　亚音速核函数法的坐标系

1. 问题的概述

该方法使用了两种坐标系(图 4-10)。一种是无因次坐标系：

$$\left.\begin{aligned}\bar{x},\bar{\xi} &= \frac{x,\xi}{b_o}\\ \bar{y},\bar{\eta} &= \frac{y,\eta}{b_o}\end{aligned}\right\}\tag{4-84}$$

所有的长度用根部半翼弦长 b_o 无因次化。

另一种是正规化坐标：

$$\left.\begin{aligned} \underline{x} &= \frac{\tilde{x} - \tilde{x}_m(b_o\tilde{y})}{\dfrac{b(b_o\tilde{y})}{b_o}} \\ \underline{\xi} &= \frac{\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_m(b_o\tilde{\eta})}{\dfrac{b(b_o\tilde{\eta})}{b_o}} \\ \underline{y} &= \frac{b_o\tilde{y}}{l} \\ \underline{\eta} &= \frac{b_o\tilde{\eta}}{l} \end{aligned}\right\} \tag{4-85}$$

使原来的翼面形状变成 $\underline{\xi}, \underline{\eta} = \pm 1$ 的方形。其中

$$\left.\begin{aligned} x_m &= \frac{1}{2}(x_{le} + x_{te}) \\ \xi_m &= \frac{1}{2}(\xi_{le} + \xi_{te}) \end{aligned}\right\} \tag{4-86}$$

x_m，ξ_m 为中线坐标，x_{le}，ξ_{le} 为前缘坐标，x_{te}，ξ_{te} 为后缘坐标。

将翼面视为一靠近 xy 平面的不可穿透的表面。设翼面与坐标系（图 4-10）以速度 U 沿正的 x 方向运动。在小扰动的条件下，基于线性位势方程式

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\left(U\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi$$

利用加速度势，把确定亚音速振动翼面上气动力的线性边值问题归结为一个联系已知的下洗分布和未知的压力分布的积分方程式，即

$$W(\tilde{x}, \tilde{y}, o) = \iint_s \Delta\overline{P}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) K(x_o, y_o, k, M) \mathrm{d}\tilde{\xi}\mathrm{d}\tilde{\eta} \tag{4-87}$$

式中 $W(\tilde{x}, \tilde{y}, o) = -4\pi\rho U \overline{w}_a(\tilde{x}, \tilde{y}) = -4\pi\rho U^2\left(\dfrac{\partial h}{\partial x} + ikh\right)$ (4-88)

$\overline{w}_a(\tilde{x}, \tilde{y})$ 为翼面上点 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 的下洗幅值。$K(x_o, y_o, k, M)$ 为积分方

程式的核函数，其物理意义是：翼面上任一点$(\bar{\xi},\bar{\eta})$的单位力在另一点$(\bar{x},\bar{y})$上所引起的下洗。$\Delta\bar{P}(\bar{\xi},\bar{\eta})$为待求的压力分布。

在积分方程式(4-87)中包含着三个部分，即下洗分布、压力分布以及核函数。以下，我们分别列出它们的表达式。

(1) 下洗分布

假设翼面的振动位移由 N 阶固有振型的线性组合来近似，即

$$H(x,y,t) = h_1(x,y)\,q_1(t) + h_2(x,y)\,q_2(t) + \cdots$$
$$= \sum_{j=1}^{N} h_j(x,y)\,q_j(t) \tag{4-89}$$

由于是简谐运动，$q_j(t)=\overline{q_j}e^{i\omega t}$，$w(\bar{x},\bar{y},t)=\overline{w_a}(\bar{x},\bar{y})e^{i\omega t}$，则下洗幅值与位移之间有如下关系

$$\overline{w}_a(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{j=1}^{N} U\left(\frac{\partial}{\partial\bar{x}} + ik\right)h_j(\bar{x},\bar{y})\,\frac{\overline{q_j}}{b_o} \tag{4-90}$$

与第 j 阶振型对应的下洗

$$\overline{w}_a(\bar{x},\bar{y}) = U\left(\frac{\partial}{\partial\bar{x}} + ik\right)h_j(\bar{x},\bar{y})\,\frac{\overline{q_j}}{b_o} \tag{4-91}$$

(2) 压力分布

假设翼面上的压力分布有如下形式：

$$\Delta\overline{P}(\bar{\xi},\bar{\eta},t) = \Delta\overline{P}(\underline{\xi},\underline{\eta},t) = P_{下} - P_{上}$$
$$= 4\rho U^2\,\frac{l}{b_o}L(\underline{\xi},\underline{\eta})\,\frac{q(t)}{b_o} \tag{4-92}$$

式中 $$L(\underline{\xi},\underline{\eta}) = \frac{b_o}{b(\underline{\eta})}\sqrt{1-\underline{\eta}^2}\left\{[a_{00} + a_{01}\underline{\eta} + a_{02}\underline{\eta}^2 + \cdots]\sqrt{\frac{1-\underline{\xi}}{1+\underline{\xi}}} + \right.$$
$$[a_{10} + a_{11}\underline{\eta} + a_{12}\underline{\eta}^2 + \cdots]\sqrt{1-\underline{\xi}^2} +$$
$$\left.[a_{20} + a_{21}\underline{\eta} + a_{22}\underline{\eta}^2 + \cdots]\underline{\xi}\sqrt{1-\underline{\xi}^2} + \cdots\right\} \tag{4-93}$$

a_{00}，a_{01}，…为待求的压力分布系数。

载荷函数 $L(\underline{\xi},\underline{\eta})$ 在翼面上必须满足各种边缘条件。对于亚音

速流，沿弦向在前缘出现方根奇异；在后缘，根据儒可夫斯基—库达条件，载荷为零；沿展向，翼梢处的载荷为零。

将(4-93)式写成更简洁的形式：

$$L(\underline{\xi},\underline{\eta})=\frac{b_o}{b}\sum_n\sum_m l_n(\underline{\xi})l_m(\underline{\eta})a_{nm} \tag{4-94}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} l_n(\underline{\xi}) &= \sqrt{\frac{1+\underline{\xi}}{1-\underline{\xi}}} \qquad (n=0)\\ &= \underline{\xi}^{n-1}\sqrt{1-\underline{\xi}^2} \qquad (n\geqslant 1)\\ l_m(\underline{\eta}) &= \underline{\eta}^m\sqrt{1-\underline{\eta}^2} \end{aligned}\right\} \tag{4-95}$$

以及

对于翼面的对称运动，m 仅取偶数($m=0,2,4,\cdots$)；对于翼面的反对称运动，m 仅取奇数($m=1,3,5,\cdots$)。

(3) 核函数的形式

$$\begin{aligned} K(x_0,y_0,k,M) = k^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0}\Big\{&-\frac{1}{k\mid y_0\mid}K_1(k\mid y_0\mid)-\\ &\frac{\pi\mathrm{i}}{2k\mid y_0\mid}[I_1(k\mid y_0\mid)-L_1(k\mid y_0\mid)]+\frac{\mathrm{i}}{k\mid y_0\mid}-\\ &\frac{kx_0}{(ky_0)^2\sqrt{(kx_0)^2+\beta^2(ky_0)^2}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\beta^2}\left[kx_0-M\sqrt{(kx_0)^2-\beta^2(ky_0)^2}\right]}+\\ &\frac{\mathrm{i}}{k\mid y_0\mid}\int_0^{\frac{1}{\beta^2k\mid y_0\mid}\left[kx_0-M\sqrt{(kx_0)^2+\beta^2(ky_0)^2}\right]}\frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}\mathrm{c}^{\mathrm{i}k\mid y_0\mid\tau}\mathrm{d}\tau\Big\} \end{aligned} \tag{4-96}$$

式中 $x_0=\tilde{x}_i-\tilde{\xi}_j$，$y_0=\tilde{y}_r-\tilde{\eta}_s$，$\beta^2=1-M^2$。$\tilde{x}_i$，$\tilde{y}_r$ 为下洗配置点的无因次坐标；$\tilde{\xi}_j$，$\tilde{\eta}_s$ 为积分点的坐标。M 为马赫数，k 为减缩频率。$K_1(k|y_0|)$ 为第二类一阶修正的贝塞尔函数，$I_1(k|y_0|)$ 为第一类一阶修正的贝塞尔函数，$L_1(k|y_0)|$ 为一阶修正的斯道维函数。

在本方法中，采用下列表达式是适宜的[18]：

$$K_1(k\mid y_0\mid)=\frac{1}{k\mid y_0\mid}+\ln\Big(\frac{k\mid y_0\mid}{2}+r\Big)I_1(k\mid y_0\mid)-$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}\left(\frac{k\mid y_0\mid}{2}\right)^{2n+1}\left[\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}+\frac{1}{2(n+1)}\right] \quad (4\text{-}97)$$

组合函数[14]：

$$I_1(k\mid y_0\mid)-L_1(k\mid y_0\mid)\approx\frac{2k\mid y_0\mid}{\pi}\left\{\frac{1.008\,5k\mid y_0\mid}{1.341\,0+1.005\,0k^2y_0^2}+\left[\frac{\pi}{4}-0.867\,5k\mid y_0\mid\left(\frac{0.464\,8+0.915\,9k\mid y_0\mid}{1.341\,0+k^2y_0^2}\right)\right]e^{-k\mid y_0\mid}\right\}$$

(4-98)

利用(4-96)、(4-97)和(4-98)式，取 $M=0.7$，$k=0.1$，0.3，0.5，0.7，1.0，核函数的数值结果示于表 4-2。

表 4-2 亚音速核函数的数值($M=0.7$)

x_0	y_0	k	$K(x_0, y_0, k, M)$
0	0.125	0.1	−63.972 483+1.112 400 6i
		0.3	−63.801 760+3.290 795 4i
		0.5	−63.513 049+5.408 475 9i
		0.7	−63.127 659+7.466 785 7i
		1.0	−63.396 688+10.445 735i
1.5	0.125	0.1	−126.407 22+19.164 157i
		0.3	−114.855 44+55.631 004i
		0.5	−92.965 139+86.828 092i
		0.7	−62.880 106+109.925 51i
		1.0	−8.795 035 8+125.222 51i
0	6.0	0.1	−0.019 270 804+0.016 642 817i
		0.3	+0.007 492 393 2+0.021 093 607i
		0.5	+0.020 859 134+0.001 885 724 3i
		0.7	+0.009 584 440 6−0.017 478 746i
		1.0	−0.018 879 269−0.005 957 135 0i

续表

x_0	y_0	k	$K(x_0, y_0, k, M)$
1.5	6.0	0.1	−0.027 208 896+0.020 042 131i
		0.3	+0.002 513 588 1+0.028 315 653i
		0.5	+0.022 102 437+0.013 555 812i
		0.7	+0.022 950 769−0.008 789 318 6i
		1.0	−0.004 456 545 2−0.022 917 941i

2. 下洗积分方程式的演算

为完成(4-87)式中的积分，将核函数按近似形式分成奇异部分和非奇异部分，即

$$K(x_0, y_0, k, M) = e^{-ikr_0}\left[-\frac{1}{y_0^2}\left(1+\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+\beta^2 y_0^2}}\right)+ik\frac{1}{\sqrt{x_0^2+\beta^2 y_0^2}}-\frac{k^2}{2}\ln\left|\sqrt{x_0^2+\beta^2 y_0^2}-x_0\right|\right]+K_{ns}(x_0, y_0, k, M) \qquad (4\text{-}99)$$

以(4-99)式代入(4-87)式，此时注意到：当 $\bar{y}=\bar{\eta}$ 时，下洗积分方程式包含有 $1/(\bar{y}-\bar{\eta})^2$ 型的二阶奇异和 $\ln|\bar{y}-\bar{\eta}|$ 型的对数奇异。

对于给定的翼面形状，根据结果的准确度要求，选取必需的下洗配置点数目。在文献[17]中，已经证明了最佳的下洗配置点的位置。

若选取 $n\times m$ 个下洗配置点，其 n 个弦向下洗配置点的坐标为：

$$\underline{X}_i = \cos\frac{2i\pi}{(2n+1)} \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad (4\text{-}100)$$

m 个展向下洗配置点的坐标为：

$$\underline{y}_r = -\cos\left(\frac{r\pi}{m+1}\right) \qquad (r=1, 2, \cdots, m) \qquad (4\text{-}101)$$

根据切比雪夫公式选取 $n\times(m+1)$ 个积分点，其弦向坐标为：

$$\underline{\xi}_j = -\cos\frac{2j-1}{2n+1}\pi \qquad (j=1, 2, \cdots n) \qquad (4\text{-}102)$$

展向坐标为：

$$\underline{\eta}_s = -\cos\left[\frac{(2s-1)\pi}{2(m+1)}\right] \qquad (s = 1, 2, \cdots, m+1) \quad (4\text{-}103)$$

此时,积分的准确度是最好的。

用上述方法确定的下洗配置点和积分点是相互交叉的,不会重合。因此,在计算包含核函数的积分时,不会出现奇异。

我们知道

$$F(\tilde{\eta}) = \int_{\frac{\xi_l(b_0\tilde{\eta})}{b}}^{\frac{\xi_t(b_0\tilde{\eta})}{b}} \bar{p}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) e^{-ikr_0} d\tilde{\xi} \quad (4\text{-}104)$$

由于函数 $F(\tilde{\eta})$ 在 $-\frac{l}{b_0} \leqslant \tilde{\eta} \leqslant \frac{l}{b_0}$ 范围内是连续的,且是有限的,在翼尖 $\tilde{\eta} = \pm\frac{l}{b_0}$ 处为零。由分部积分公式

$$\oint_{-\frac{l}{b_0}}^{\frac{l}{b_0}} \frac{F(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta}}{(\tilde{y} - \tilde{\eta})^2} = \frac{F(\tilde{\eta})}{(\tilde{y} - \tilde{\eta})^2}\Bigg|_{-\frac{l}{b_0}}^{\frac{l}{b_0}} - \oint_{-\frac{l}{b_0}}^{\frac{l}{b_0}} \frac{1}{(\tilde{y} - \tilde{\eta})} \frac{\partial F(\tilde{\eta})}{\partial \tilde{\eta}} d\tilde{\eta}$$

$$= -\oint_{-\frac{l}{b_0}}^{\frac{l}{b_0}} \frac{1}{(\tilde{y} - \tilde{\eta})} \cdot \frac{\partial F(\tilde{\eta})}{\partial \tilde{\eta}} d\tilde{\eta} \quad (4\text{-}105)$$

利用变换式:

$$J = \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \underline{\xi}} \cdot \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \underline{\eta}} - \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \underline{\eta}} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \underline{\xi}} = \frac{b(b_0\tilde{\eta})}{b_0} \cdot \frac{l}{b_0} \quad (4\text{-}106)$$

(4-87)式的面积分变成线积分。我们把总的下洗分成三个下洗分量:

$$W(\tilde{x}_i, \tilde{y}_r) = W_{\mathrm{I}}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_r) + W_{\mathrm{II}}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_r) + W_{\mathrm{III}}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_r) \quad (4\text{-}107)$$

式中

$$W_{\mathrm{I}}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_r) = \int_{-1}^{1} \frac{b_0}{l} \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \left\{ \int_{-1}^{1} \bar{p}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) e^{-ikr_0} \cdot \left[1 + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \beta^2 y_0^2}}\right] \frac{b(b_0\eta)}{b_0} d\underline{\xi} \right\} \frac{1}{\frac{l}{b_0}(\underline{y} - \underline{\eta})} \frac{l}{b_0} d\underline{\eta} \quad (4\text{-}108)$$

$$W_{\mathrm{II}}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_r) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \bar{p}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) e^{-ikr_0} \left\{ \frac{ik}{\sqrt{x_0^2 + \beta^2 y_0^2}} - \right.$$

$$-\frac{k^2}{2}\ln\left|\sqrt{x_0^2-\beta^2 y_0^2}-x_0\right|\Bigg\}\cdot\frac{b(b_0\bar{\eta})}{b_0}\mathrm{d}\,\underline{\xi}\frac{l}{b_0}\mathrm{d}\,\underline{\eta} \tag{4-109}$$

$$W_{\text{出}}(\widetilde{x}_i,\ \widetilde{y}_r)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\bar{p}(\underline{\xi},\underline{\eta})K_{ns}(x_0,y_0,k,M)\frac{b(b_0\bar{\eta})}{b_0}\mathrm{d}\,\underline{\xi}\cdot\frac{l}{b_0}\mathrm{d}\,\underline{\eta} \tag{4-110}$$

现在，将(4-92)式代入(4-108)到(4-110)式，则下洗方程式可写成：

$$W(\widetilde{x}_i,\ \widetilde{y}_r)=4\rho U^2\int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial\,\underline{\eta}}\left[\sqrt{1-\underline{\eta}^2}\cdot G_1(\underline{\xi},\ \underline{y},\ \underline{\eta})\right]\frac{1}{(\underline{y}-\underline{\eta})}\mathrm{d}\,\underline{\eta}+$$

$$4\rho U^2\int_{-1}^{1}\left(\frac{l}{b_0}\right)^2\sqrt{1-\underline{\eta}^2}\cdot G_2(\underline{\xi},\ \underline{y},\ \underline{\eta})\mathrm{d}\,\underline{\eta}+$$

$$4\rho U^2\int_{1}^{1}\left(\frac{l}{b_0}\right)^2\sqrt{1-\underline{\eta}^2}\cdot G_3(\underline{\xi},\ \underline{y},\ \underline{\eta})\mathrm{d}\,\eta \tag{4-111}$$

其中 $G_1(\underline{\xi},\ \underline{y},\ \underline{\eta})=\int_{-1}^{1}\Bigg\{[a_{00}+a_{01}\,\underline{\eta}+a_{02}\,\underline{\eta}^2+\cdots]\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\underline{\xi}}}+$

$$[a_{10}+a_{11}\,\underline{\eta}+a_{12}\,\underline{\eta}^2+\cdots]\sqrt{1-\underline{\xi}^2}+$$

$$[a_{20}+a_{21}\,\underline{\eta}+a_{22}\,\underline{\eta}^2+\cdots]\underline{\xi}\sqrt{1-\underline{\xi}^2}+$$

$$\cdots\Bigg\}\mathrm{e}^{\,ikx_0}\left[1+\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+\beta^2 y_0^2}}\right]\mathrm{d}\,\underline{\xi} \tag{4-112}$$

$$G_2(\underline{\xi},\ \underline{y},\ \underline{\eta})=\int_{-1}^{1}\Bigg\{[a_{00}+a_{01}\,\underline{\eta}+a_{02}\,\underline{\eta}^2+\cdots]\sqrt{\frac{1-\underline{\xi}}{1+\underline{\xi}}}+$$

$$[a_{10}+a_{11}\,\underline{\eta}+a_{12}\,\underline{\eta}^2+\cdots]\sqrt{1-\underline{\xi}^2}+$$

$$[a_{20}+a_{21}\,\underline{\eta}+a_{22}\,\underline{\eta}^2+\cdots]\underline{\xi}\sqrt{1-\underline{\xi}^2}+$$

$$\cdots\Bigg\}\mathrm{e}^{\,ikx_0}\left[\frac{ik}{\sqrt{x_0^2+\beta^2 y_0^2}}-\frac{k^2}{2}\ln\left|\sqrt{x_0^2+\beta^2 y_0^2}-x_0\right|\right]\mathrm{d}\,\underline{\xi} \tag{4-113}$$

$$G_3(\underline{\xi},\ \underline{y},\ \underline{\eta})=\int_{1}^{1}\Bigg\{[a_{00}+a_{01}\,\underline{\eta}+a_{02}\,\underline{\eta}^2+\cdots]\sqrt{\frac{1+\xi}{1+\underline{\xi}}}+$$

$$[a_{10}+a_{11}\,\underline{\eta}+a_{12}\,\underline{\eta}^2+\cdots]\sqrt{1-\underline{\xi}^2}+$$

$$[a_{20}+a_{21}\underline{\eta}+a_{22}\underline{\eta}^2+\cdots]\underline{\xi}\sqrt{1-\underline{\xi}^2}+\cdots\}K_{ns}(x_0,y_0,k,M)\mathrm{d}\underline{\xi} \tag{4-114}$$

下面，我们分别完成弦向积分和展向积分。

弦向积分

由切比雪夫—高斯求积公式，形如

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\underline{\xi}}{1+\underline{\xi}}}f(\underline{\xi})\mathrm{d}\underline{\xi}=\sum_{j=1}^{n}H_j\cdot f(\underline{\xi}_j) \tag{4-115}$$

式中
$$\underline{\xi}_j=-\cos\frac{2j-1}{2n+1}\pi \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

$$H_j=\frac{2\pi}{2n+1}(1-\underline{\xi}_j)$$

若函数 $f(\underline{\xi})$ 为不大于 $(2n-1)$ 次的多项式，用 n 项求和公式完成(4-115)式的积分是准确的。于是

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\underline{\xi}}{1+\underline{\xi}}}\{\cdots\}\mathrm{d}\underline{\xi}=\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=1}^{n}(1-\underline{\xi}_j)\{\cdots\}$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\underline{\xi}^2}\{\cdots\}\mathrm{d}\underline{\xi}=\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=1}^{n}(1-\underline{\xi}_j^2)\{\cdots\}$$

$$\int_{-1}^{1}\underline{\xi}\sqrt{1-\underline{\xi}^2}\{\cdots\}\mathrm{d}\underline{\xi}=\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=1}^{n}\underline{\xi}_j(1-\underline{\xi}_j^2)\{\cdots\} \tag{4-116}$$

……

当 $\underline{\eta}\to y_r$ 时

$$G_1(\underline{\xi},\underline{y}_r,\underline{y}_r)=\int_{-1}^{1}\Big\{[a_{00}+a_{01}\underline{y}_r+a_{02}\underline{y}_r^2+\cdots]\sqrt{\frac{1-\underline{\xi}}{1+\underline{\xi}}}+$$
$$[a_{10}+a_{11}\underline{y}_r+a_{12}\underline{y}_r^2+\cdots]\sqrt{1-\underline{\xi}^2}+$$
$$[a_{20}+a_{21}\underline{y}_r+a_{22}\underline{y}_r^2+\cdots]\underline{\xi}\sqrt{1-\underline{\xi}^2}+$$
$$\cdots\}\mathrm{e}^{ik(\widetilde{x}_i-\widetilde{\xi})}\left[1+\frac{\widetilde{x}_i-\widetilde{\xi}}{|\widetilde{x}_i-\widetilde{\xi}|}\right]\mathrm{d}\underline{\xi} \tag{4-117}$$

令 $f(\tilde{\xi})=\dfrac{\widetilde{x}_i-\tilde{\xi}}{|\widetilde{x}_i-\tilde{\xi}|}$，它具有下列特性(见图 4-11)

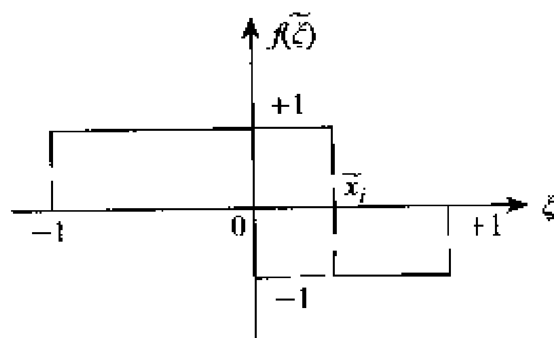


图 4-11 $f(\tilde{\xi})$的特性

$$f(\xi)=\begin{cases}-1, & \xi>\widetilde{x}_i\\ +1, & \xi<\widetilde{x}_i\end{cases}$$

则

$$1+\frac{\widetilde{x}_i-\tilde{\xi}}{|\widetilde{x}_i-\tilde{\xi}|}=\begin{cases}2 & (-1,\widetilde{x}_i)\\ 0 & (\widetilde{x}_i,+1)\end{cases}\tag{4-118}$$

此时

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\underline{\xi}}{1+\underline{\xi}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\widetilde{x}-\widetilde{\xi})}\left[1+\frac{\tilde{x}-\tilde{\xi}}{|\tilde{x}-\tilde{\xi}|}\right]\mathrm{d}\,\underline{\xi}$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\underline{\xi}}{1+\underline{\xi}}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{b(b_0\widetilde{y})}{b_0}(\underline{x}-\underline{\xi})}-1\right]\left[1+\frac{\underline{x}-\underline{\xi}}{|\underline{x}-\underline{\xi}|}\right]\mathrm{d}\,\underline{\xi}+$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\underline{\xi}}{1+\underline{\xi}}}\left[1+\frac{\underline{x}-\underline{\xi}}{|\underline{x}-\underline{\xi}|}\right]\mathrm{d}\,\underline{\xi}$$

$$=\int_{-1}^{\underline{x}_i}\sqrt{\frac{1-\underline{\xi}}{1+\underline{\xi}}}\left[\mathrm{e}^{\ \mathrm{i}k\frac{b(b_0\widetilde{y})}{b_0}(\underline{x}-\underline{\xi})}-1\right]\left[1+\frac{\tilde{x}-\tilde{\xi}}{|\tilde{x}-\tilde{\xi}|}\right]\mathrm{d}\,\underline{\xi}+2\int_{1}^{\underline{x}_i}\sqrt{\frac{1-\underline{\xi}}{1+\underline{\xi}}}\mathrm{d}\,\underline{\xi}$$

$$=\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{b(b_0\widetilde{y})}{b_0}(\underline{x}_i-\underline{\xi}_j)}-1\right]\left[1+\frac{\underline{x}_i-\underline{\xi}_j}{|\underline{x}_i-\underline{\xi}_j|}\right]+$$

$$2\left[\sqrt{1-\underline{x}_i^2}+\sin^{-1}\underline{x}_i+\frac{\pi}{2}\right]\tag{4-119}$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\underline{\xi}^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\widetilde{x}-\widetilde{\xi})}\left[1+\frac{\widetilde{x}-\widetilde{\xi}}{|\widetilde{x}-\widetilde{\xi}|}\right]\mathrm{d}\,\underline{\xi}$$

$$=\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=1}^{n}(1-\underline{\xi}_j^2)\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{b(b_0\widetilde{y})}{b_0}(\underline{x}_i-\underline{\xi}_j)}-1\right]\left[1+\frac{\underline{x}_i-\underline{\xi}_j}{|\underline{x}_i-\underline{\xi}_j|}\right]+$$

$$2\left[\frac{\underline{x}_i}{2}\sqrt{1-\underline{x}_i^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\underline{x}_i+\frac{\pi}{4}\right] \qquad (4\text{-}120)$$

$$\int_{-1}^{1}\underline{\xi}\sqrt{1-\underline{\xi}^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\widetilde{x}-\widetilde{\xi})}\left[1+\frac{\widetilde{x}-\widetilde{\xi}}{|\widetilde{x}-\widetilde{\xi}|}\right]\mathrm{d}\,\underline{\xi}$$

$$=\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=1}^{n}\underline{\xi}_j(1-\underline{\xi}_j^2)\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{b(b_0\widetilde{y})}{b_0}(\underline{x}_i-\underline{\xi}_j)}-1\right]\left[1+\frac{\underline{x}_i-\underline{\xi}_j}{|\underline{x}_i-\underline{\xi}_j|}\right]+$$

$$2\left[-\frac{1}{3}(1-\underline{x}_i^2)^{\frac{3}{2}}\right] \qquad (4\text{-}121)$$

$$\int_{-1}^{1}\underline{\xi}^2\sqrt{1-\underline{\xi}^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\widetilde{x}-\widetilde{\xi})}\left[1+\frac{\widetilde{x}-\widetilde{\xi}}{|\widetilde{x}-\widetilde{\xi}|}\right]\mathrm{d}\,\underline{\xi}$$

$$=\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=1}^{n}\underline{\xi}_j^2(1-\underline{\xi}_j^2)\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{b(b_0\widetilde{y})}{b_0}(\underline{x}_i-\underline{\xi}_j)}-1\right]\left[1+\frac{\underline{x}_i-\underline{\xi}_j}{|\underline{x}_i-\underline{\xi}_j|}\right]+$$

$$2\left[\frac{\underline{x}_i}{8}(2\,\underline{x}_i-1)\sqrt{1-\underline{x}_i^2}+\frac{1}{8}\sin^{-1}\underline{x}_i+\frac{\pi}{16}\right] \qquad (4\text{-}122)$$

$$\int_{-1}^{1}\underline{\xi}^3\sqrt{1-\underline{\xi}^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\widetilde{x}-\widetilde{\xi})}\left[1+\frac{\widetilde{x}-\widetilde{\xi}}{|\widetilde{x}-\widetilde{\xi}|}\right]\mathrm{d}\,\underline{\xi}$$

$$=\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=1}^{n}\underline{\xi}_j^3(1-\underline{\xi}_j^2)\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{b(b_0\widetilde{y})}{b_0}(\underline{x}_i-\underline{\xi}_j)}-1\right]\left[1+\frac{\underline{x}_i-\underline{\xi}_j}{|\underline{x}_i-\underline{\xi}_j|}\right]+$$

$$2\left[-\frac{(1-\underline{x}_i^2)^{\frac{3}{2}}}{5}\left(\underline{x}_i^2+\frac{2}{3}\right)\right] \qquad (4\text{-}123)$$

……

展向积分与弦向积分相类似，形如

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\underline{y}^2}\,g(\underline{y})\,\mathrm{d}\,\underline{y}=\sum_{r=1}^{m}H_r g(\underline{y}_r) \qquad (4\text{-}124)$$

式中 $\underline{y}_r=-\cos\frac{r\pi}{m+1}\quad(r=1,\ 2,\ \cdots,m)$

$$H_r = \frac{\pi(1 - \underline{y}_r^2)}{m + 1}$$

若 $g(\underline{y})$是不大于$(2m-1)$次的多项式，则(4-124)式的积分是准确的。

现在，我们计算(4-111)式的第一个积分

$$I(\underline{y}) = \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \sqrt{1 - \underline{\eta}^2}\, G_1(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{\eta}) \frac{1}{\underline{y} - \underline{\eta}} \mathrm{d}\underline{\eta} \qquad (4\text{-}125)$$

注意到，当$\underline{y} = \underline{\eta}$时，上式出现奇异，且对$\underline{\eta}$微分也很不方便。为此，采取分离奇异的方法。

$$I(\underline{y}) = \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \sqrt{1 - \underline{\eta}^2} [G_1(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{\eta}) - G_1(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{y})] \frac{1}{\underline{y} - \underline{\eta}} \mathrm{d}\underline{\eta} +$$

$$G_1(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{y}) \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \sqrt{1 - \underline{\eta}^2} \frac{1}{\underline{y} - \underline{\eta}} \mathrm{d}\underline{\eta} \qquad (4\text{-}126)$$

上式中的第一个积分，可用分部积分公式；而第二个积分

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial \underline{\eta}} \sqrt{1 - \underline{\eta}^2} \frac{1}{\underline{y} - \underline{\eta}} \mathrm{d}\underline{\eta} = \pi$$

如果 $G_1(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{\eta})$是连续的，则它的各阶导数（相对于$\underline{\eta}$）也是连续的，并且是非奇异的。

$$G_1(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{\eta}) = G_1(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{y}) - (\underline{\eta} - \underline{y}) G'_1(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{y}) +$$

$$\frac{(\underline{\eta} - \underline{y})^2}{2!} G_1(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{\eta}) + \cdots$$

$$\lim_{\underline{\eta} \to \underline{y}} \left[\frac{G_1(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{\eta}) - G_1(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{y})}{\underline{y} - \underline{\eta}} \right] = G'_1(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{y})$$

则

$$I(\underline{y}) = -\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \underline{\eta}^2} [G_1(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{\eta}) - G_1(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{y})] \frac{1}{(\underline{y} - \underline{\eta})^2} \mathrm{d}\underline{\eta} +$$

$$G_1(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{y})\pi \qquad (4\text{-}127)$$

引进函数

$$F(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{\eta}) = (1 - \underline{\eta}^2) \left[\frac{G_1(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{\eta}) - G_1(\underline{\xi}, \underline{y}, \underline{y})}{\underline{y} - \underline{\eta}} \right]$$

于是，(4-127)式可写成：

$$I(\underline{y})=-\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\underline{\eta}^{2}}}\frac{F(\underline{\xi},\underline{y},\underline{\eta})}{(\underline{y}-\underline{\eta})^{2}}\mathrm{d}\underline{\eta}+G_{1}(\underline{\xi},\underline{y},\underline{y})\pi \tag{4-128}$$

类似地

$$I(\underline{y})=-\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\underline{\eta}^{2}}}\left[\frac{F(\underline{\xi},\underline{y},\underline{\eta})-F(\underline{\xi},\underline{y},\underline{y})}{\underline{y}-\underline{\eta}}\right]\mathrm{d}\underline{\eta}-$$

$$F(\underline{\xi},\underline{y},\underline{y})\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\underline{\eta}^{2}}}\frac{1}{\underline{y}-\underline{\eta}}\mathrm{d}\underline{\eta}+G_{1}(\underline{\xi},\underline{y},\underline{y})\pi \tag{4-129}$$

式中 $$F(\underline{\xi},\underline{y},\underline{y})\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\underline{\eta}^{2}}}\frac{1}{\underline{y}-\underline{\eta}}\mathrm{d}\underline{\eta}=0$$

因此

$$I(\underline{y})=-\sum_{s=1}^{m+1}H_{s}\left[\frac{F(\underline{\xi},\underline{y},\underline{\eta})-F(\underline{\xi},\underline{y},\underline{y})}{(\underline{y}-\underline{\eta}_{s})}\right]+G_{1}(\underline{\xi},\underline{y},\underline{y})\pi \tag{4-130}$$

式中 $$\underline{\eta}_{s}=-\cos\frac{(2s-1)\pi}{2(m+1)} \qquad (s=1,2,\cdots,m+1)$$

$$H_{s}=\frac{\pi}{(m+1)}$$

将函数 $F(\underline{\xi},\underline{y},\underline{\eta})$和 $F(\underline{\xi},\underline{y},\underline{y})$代入(4-130)式，得到

$$I(\underline{y})=-\sum_{s=1}^{m+1}\frac{\pi}{(m+1)}\left\{\frac{(1-\underline{\eta}_{s}^{2})[G_{1}(\underline{\xi},\underline{y},\underline{\eta})-G_{1}(\underline{\xi},\underline{y},\underline{y})]}{(\underline{y}-\underline{\eta}_{s})^{2}}-\right.$$

$$\left.\frac{(1-\underline{\eta}_{s}^{2})[G_{1}{}'(\underline{\xi},\underline{y},\underline{y})}{\underline{y}-\underline{\eta}_{s}}\right\}+G_{1}(\underline{\xi},\underline{y},\underline{y})\pi \tag{4-131}$$

若选取$\underline{y}$为下洗配置点，因

$$\sum_{s=1}^{m+1}\frac{\pi}{(m+1)}\frac{1}{\underline{y}_{r}-\underline{\eta}_{s}}=0 \tag{4-132}$$

则(4-131)式化简为

$$I(\underline{y}_r)=-\sum_{s=1}^{m+1}\frac{\pi}{(m+1)}\frac{(1-\underline{\eta}_s^2)[G_1(\underline{\xi},\underline{y},\underline{\eta})-G_1(\underline{\xi},\underline{y},\underline{y})]}{(\underline{y}_r-\underline{\eta}_s)^2}+$$

$$G_1(\underline{\xi},\underline{y}_r,\underline{y}_r)\pi \tag{4-133}$$

由于奇异已被分离,此时

$$I(\underline{y}_r)=-\sum_{s=1}^{m+1}\frac{\pi}{(m+1)}\frac{(1-\underline{\eta}_s^2)G_1(\underline{\xi},\underline{y}_r,\underline{\eta}_s)}{(\underline{y}_r-\underline{\eta}_s)^2}+$$

$$G_1(\underline{\xi},\underline{y}_r,\underline{y}_r)\pi\left[1+\sum_{s=1}^{m+1}\frac{1-\underline{\eta}_s^2}{(m+1)(\underline{y}_s-\underline{\eta}_s)^2}\right] \tag{4-134}$$

可以证明

$$G_1(\underline{\xi},\underline{y}_r,\underline{y}_r)\pi\left[1+\sum_{s=1}^{m+1}\frac{1-\underline{\eta}_s^2}{(m+1)(\underline{y}_r-\underline{\eta}_s)^2}\right]=G_1(\underline{\xi},\underline{y}_r,\underline{y}_r)\pi(m+1)$$

最后,展向积分(4-125)式具有如下形式:

$$I(\underline{y}_r)=-\sum_{s=1}^{m+1}\frac{\pi}{(m+1)}\frac{(1-\underline{\eta}_s^2)G_1(\underline{\xi},\underline{y}_r,\underline{\eta}_s)}{(\underline{y}_r-\underline{\eta}_s)^2}+G_1(\underline{\xi},\underline{y}_r,\underline{y}_r)\pi(m+1) \tag{4-135}$$

由(4-119)到(4-123)式,得

$$G_1(\underline{\xi},\underline{y}_r,\underline{y}_r)=\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=1}^{n}\{[a_{00}+a_{01}\underline{y}_r+a_{02}\underline{y}_r^2+\cdots](1-\underline{\xi}_j)+$$

$$[a_{10}+a_{11}\underline{y}_r+a_{12}\underline{y}_r^2+\cdots](1-\underline{\xi}_j^2)+$$

$$[a_{20}+a_{21}\underline{y}_r+a_{22}\underline{y}_r^2+\cdots](1-\underline{\xi}_j^2)\underline{\xi}_j+$$

$$[a_{30}+a_{31}\underline{y}_r+a_{32}\underline{y}_r^2+\cdots](1-\underline{\xi}_j^2)\underline{\xi}_j^2+$$

$$[a_{40}+a_{41}\underline{y}_r+a_{42}\underline{y}_r^2+\cdots](1-\underline{\xi}_j^2)\underline{\xi}_j^3+$$

$$\cdots\}[e^{-ik\frac{b(b_0\bar{y})}{b_0}(\underline{x}_i-\underline{\xi}_j)}-1]\left[1+\frac{\underline{x}_i-\underline{\xi}_j}{|(\underline{x}_i-\underline{\xi}_j)|}\right]+$$

$$2\left\{[a_{00}+a_{01}\underline{y}_r+a_{02}\underline{y}_r^2+\cdots]\left[\sqrt{1-\underline{x}_i^2}+\sin^{-1}\underline{x}_i+\frac{\pi}{2}\right]+\right.$$

$$[a_{10}+a_{11}\underline{y}_r+a_{12}\underline{y}_r^2+\cdots]\left[\frac{\underline{x}_i}{2}\sqrt{1-\underline{x}_i^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\underline{x}_i+\frac{\pi}{4}\right]+$$

$$[a_{20}+a_{21}\underline{y}_r+a_{22}\underline{y}_r^2+\cdots]\left[-\frac{1}{3}(1-\underline{x}_i^2)^{\frac{3}{2}}\right]+$$

$$[a_{30}+a_{31}\underline{y}_r+a_{32}\underline{y}_r^2+\cdots]\left[\frac{\underline{x}_i}{8}(2\underline{x}_i^2-1)\sqrt{1-\underline{x}_i^2}+\frac{1}{8}\sin^{-1}\underline{x}_i+\frac{\pi}{16}\right]+$$

$$[a_{40}+a_{41}\underline{y}_r+a_{42}\underline{y}_r^2+\cdots]\left[-\frac{1}{5}(1-\underline{x}_i^2)^{\frac{3}{2}}(\underline{x}_i^2+\frac{2}{3}\right]+\cdots\Big\}$$

(4-136)

由(4-115)式得：

$$G_1(\underline{\xi},\underline{y},\underline{\eta})=\sum_{j=1}^{n}\frac{2\pi}{2n+1}\{[a_{00}+a_{01}\underline{\eta}+a_{02}\underline{\eta}^2+\cdots](1-\underline{\xi}_j)+$$
$$[a_{10}+a_{11}\underline{\eta}+a_{12}\underline{\eta}^2+\cdots](1-\underline{\xi}_j^2)+$$
$$[a_{20}+a_{21}\underline{\eta}+a_{22}\underline{\eta}^2+\cdots]\underline{\xi}_j(1-\underline{\xi}_j^2)+$$
$$[a_{30}+a_{31}\underline{\eta}+a_{32}\underline{\eta}^2+\cdots]\underline{\xi}_j^2(1-\underline{\xi}_j^2)+$$
$$[a_{40}+a_{41}\underline{\eta}+a_{42}\underline{\eta}^2+\cdots]\underline{\xi}_j^3(1-\underline{\xi}_j^2)+$$
$$\cdots\}e^{-ikx_0}\left[1+\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+\beta^2y_0^2}}\right] \qquad (4\text{-}137)$$

$$G_2(\underline{\xi},\underline{y},\underline{\eta})=\sum_{j=1}^{n}\frac{2\pi}{2n+1}\{[a_{00}+a_{01}\underline{\eta}+a_{02}\underline{\eta}^2+\cdots](1-\underline{\xi}_j)+$$
$$[a_{10}+a_{11}\underline{\eta}+a_{12}\underline{\eta}^2+\cdots](1-\underline{\xi}_j^2)+$$
$$[a_{20}+a_{21}\underline{\eta}+a_{22}\underline{\eta}^2+\cdots]\underline{\xi}_j(1-\underline{\xi}_j^2)+$$
$$[a_{30}+a_{31}\underline{\eta}+a_{32}\underline{\eta}^2+\cdots]\underline{\xi}_j^2(1-\underline{\xi}_j^2)+$$
$$[a_{40}+a_{41}\underline{\eta}+a_{42}\underline{\eta}^2+\cdots]\underline{\xi}_j^3(1-\underline{\xi}_j^2)+$$
$$\cdots\}e^{ikx_0}\left[ik\frac{1}{\sqrt{x_0^2+\beta^2y_0^2}}-\frac{k^2}{2}\ln\left|\sqrt{x_0^2+\beta^2y_0^2}-x_0\right|\right]$$

(4-138)

$$
G_3(\underline{\xi},\ \underline{y},\ \underline{\eta}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{2\pi}{2n+1}\{[a_{00}+a_{01}\ \underline{\eta}+a_{02}\ \underline{\eta}^2+\cdots](1-\underline{\xi}_j)+
$$

$$
[a_{10}+a_{11}\ \underline{\eta}+a_{12}\ \underline{\eta}^2+\cdots](1-\underline{\xi}_j^2)+
$$

$$
[a_{20}+a_{21}\ \underline{\eta}+a_{22}\ \underline{\eta}^2+\cdots]\underline{\xi}_j(1-\underline{\xi}_j^2)+
$$

$$
[a_{30}+a_{31}\ \underline{\eta}+a_{32}\ \underline{\eta}^2+\cdots]\underline{\xi}_j^2(1-\underline{\xi}_j^2)+
$$

$$
[a_{40}+a_{41}\ \underline{\eta}+a_{42}\ \underline{\eta}^2+\cdots]\underline{\xi}_j^3(1-\underline{\xi}_j^2)+
$$

$$
\cdots\}K_m(x_0,y_0,k,M) \tag{4-139}
$$

根据展向积分公式(4-124)和(4-135)，下洗积分方程式最后表示为：

$$
W(\widetilde{x}_i,\widetilde{y}_r) = 4\rho U^2\left\{\sum_{s=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n}\frac{2\pi^2}{(m+1)(2n+1)}(1-\underline{\eta}_s^2)([a_{00}+a_{01}\ \underline{\eta}+
$$

$$
a_{02}\ \underline{\eta}^2+a_{03}\ \underline{\eta}^3+a_{04}\ \underline{\eta}^4+\cdots](1-\underline{\xi}_j)+
$$

$$
[a_{10}+a_{11}\ \underline{\eta}+a_{12}\ \underline{\eta}^2+a_{13}\ \underline{\eta}^3+a_{14}\ \underline{\eta}^4\cdots](1-\underline{\xi}_j^2)+
$$

$$
[a_{20}+a_{21}\ \underline{\eta}+a_{22}\ \underline{\eta}^2+a_{23}\ \underline{\eta}^3+a_{24}\ \underline{\eta}^4\cdots]\underline{\xi}_j(1-\underline{\xi}_j^2)+
$$

$$
[a_{30}+a_{31}\ \underline{\eta}+a_{32}\ \underline{\eta}^2+a_{33}\ \underline{\eta}^3+a_{34}\ \underline{\eta}^4\cdots]\underline{\xi}_j^2(1-\underline{\xi}_j^2)+
$$

$$
[a_{40}+a_{41}\ \underline{\eta}+a_{42}\ \underline{\eta}^2+a_{43}\ \underline{\eta}^3+a_{44}\ \underline{\eta}^4\cdots]\underline{\xi}_j^3(1-\underline{\xi}_j^2)+
$$

$$
\cdots)\left(\frac{l}{b_0}\right)^2\right\}\left\{e^{ikr_0}\left[-\frac{1}{y_0^2}\left(1+\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+\beta^2y_0^2}}\right)+ik\frac{1}{\sqrt{x_0^2+\beta^2y_0^2}}-\right.\right.
$$

$$
\left.\left.\frac{k^2}{2}\ln\left|\sqrt{x_0^2+\beta^2y_0^2}-x_0\right|\right]+K_m(x_0,y_0,k,M)\right\}+
$$

$$
4\rho U^2(m+1)\pi\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{2\pi}{2n+1}([a_{00}+a_{01}\ \underline{y}_r+a_{02}\ \underline{y}_r^2+\right.
$$

$$
a_{03}\ \underline{y}_r^3+a_{04}\ \underline{y}_r^4+\cdots](1-\underline{\xi}_j)+
$$

$$
[a_{10}+a_{11}\ \underline{y}_r+a_{12}\ \underline{y}_r^2+a_{13}\ \underline{y}_r^3+a_{14}\ \underline{y}_r^4+\cdots](1-\underline{\xi}_j^2)+
$$

$$
[a_{20}+a_{21}\ \underline{y}_r+a_{22}\ \underline{y}_r^2+a_{23}\ \underline{y}_r^3+a_{24}\ \underline{y}_r^4+\cdots]\underline{\xi}_j(1-\underline{\xi}_j^2)+
$$

$$
[a_{30}+a_{31}\ \underline{y}_r+a_{32}\ \underline{y}_r^2+a_{33}\ \underline{y}_r^3+a_{34}\ \underline{y}_r^4+\cdots]\underline{\xi}_j^2(1-\underline{\xi}_j^2)+
$$

$$
[a_{40}+a_{41}\ \underline{y}_r+a_{42}\ \underline{y}_r^2+a_{43}\ \underline{y}_r^3+a_{44}\ \underline{y}_r^4+\cdots]\underline{\xi}_j^3(1-\underline{\xi}_j^2)+
$$

$$\cdots)\left[e^{-ik\frac{h(b_0\bar{y}_r)}{b_0}(\underline{x}_i-\underline{\xi}_j)}-1\right]\left[1+\frac{\underline{x}_i-\underline{\xi}_j}{|\underline{x}_i-\underline{\xi}_j|}\right]\Bigg\}+$$

$$4\rho U^2\pi(m+1)\cdot 2\Bigg\{\left[a_{00}+a_{01}\,\underline{y}_r+a_{02}\,\underline{y}_r^2+a_{03}\,\underline{y}_r^3+a_{04}\,\underline{y}_r^4+\right.$$

$$\left.\cdots\right]\left[\sqrt{1-\underline{x}_i^2}+\sin^{-1}\underline{x}_i+\frac{\pi}{2}\right]+$$

$$[a_{10}+a_{11}\,\underline{y}_r+a_{12}\,\underline{y}_r^2+a_{13}\,\underline{y}_r^3+a_{14}\,\underline{y}_r^4+\cdots]\left[\frac{\underline{x}_i}{2}\sqrt{1-\underline{x}_i^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\underline{x}_i+\frac{\pi}{4}\right]+$$

$$[a_{20}+a_{21}\,\underline{y}_r+a_{22}\,\underline{y}_r^2+a_{23}\,\underline{y}_r^3+a_{24}\,\underline{y}_r^4+\cdots]\left[-\frac{1}{3}(1-\underline{x}_i^2)^{\frac{3}{2}}\right]+$$

$$[a_{30}+a_{31}\,\underline{y}_r+a_{32}\,\underline{y}_r^2+a_{33}\,\underline{y}_r^3+a_{34}\,\underline{y}_r^4+\cdots]\left[\frac{\underline{x}_i}{8}(2\,\underline{x}_i^2-1)\sqrt{1-\underline{x}_i^2}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{8}\sin^{-1}\underline{x}_i+\frac{\pi}{16}\right]+[a_{40}+a_{41}\,\underline{y}_r+a_{42}\,\underline{y}_r^2+a_{43}\,\underline{y}_r^3+$$

$$a_{44}\,\underline{y}_r^4+\cdots]\left[-\frac{1}{5}(1-\underline{x}_i^2)^{\frac{3}{2}}(\underline{x}_i^2+\frac{2}{3})\right]+\cdots\Bigg\} \quad (4\text{-}140)$$

式中
$$W(\tilde{x}_i,\tilde{y}_r)=-4\pi\rho U\,\overline{w_a}(\tilde{x}_i,\tilde{y}_r)$$
$$=-4\pi\rho U^2\left(\frac{\partial h}{\partial \tilde{x}}+ikh\right) \quad (4\text{-}141)$$

将(4-140)式改写为矩阵形式，即

$$\{W(\tilde{x}_i,\tilde{y}_r)\}=[J_{nm}]\{a_{nm}\} \quad (4\text{-}142)$$

其中
$$\underset{\downarrow}{p}\overset{nm\rightarrow}{[J_{nm}^{(P)}]}=[B_{nm}^{(P)}]+[C_{nm}^{(P)}]+[E_{nm}^{(P)}] \quad (4\text{-}143)$$

以及
$$B_{nm}^{(P)}=\frac{4\rho U^2\cdot 2\pi^2}{(m+1)(2n+1)}\left(\frac{l}{b_0}\right)^2\lfloor f_m(\underline{\eta}_s)\rfloor[K_{sj}^{(P)}]\{f_n(\underline{\xi}_j)\} \quad (4\text{-}144)$$

$$C_{nm}^{(P)}=\frac{4\rho U^2\cdot 2\pi^2(m+1)}{(2n+1)}\,\underline{y}_r^m\,\lfloor 1\rfloor\{f_n(\underline{\xi}_j)\cdot g(\underline{x}_i,\underline{\xi}_j)\} \quad (4\text{-}145)$$

$$E_{nm}^{(P)}=4\rho U^2\cdot 2\pi(m+1)\,\underline{y}_r^m\cdot E_n(\underline{x}_i) \quad (4\text{-}146)$$

$$f_n(\underline{\xi}_j) = (1-\underline{\xi}_j) \qquad (n=0)$$
$$= (1-\underline{\xi}_j^2)\underline{\xi}_j^{n-1} \qquad (n \geqslant 1) \tag{4-147}$$
$$f_m(\underline{\eta}_s) = \underline{\eta}_s^m(1-\underline{\eta}_s^2) \tag{4-148}$$
$$g(\underline{x}_i, \underline{\xi}_j) = [e^{ik\frac{b}{b_0}(\underline{x}_i - \underline{\xi}_j)} - 1]\left[1 + \frac{\underline{x}_i - \underline{\xi}_j}{|\underline{x}_i - \underline{\xi}_j|}\right] \tag{4-149}$$
$$E_n(\underline{x}_i) = \sqrt{1-\underline{x}_i^2} + \sin^{-1}\underline{x}_i + \frac{\pi}{2} \qquad (n=0)$$
$$= \frac{\underline{x}_i}{2}\sqrt{1-\underline{x}_i^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\underline{x}_i + \frac{\pi}{4} \qquad (n=1)$$
$$= -\frac{1}{3}(1-\underline{x}_i^2)^{\frac{3}{2}} \qquad (n=2)$$
$$= \frac{\underline{x}_i}{8}(2\underline{x}_i^2 - 1)\sqrt{1-\underline{x}_i^2} + \frac{1}{8}\sin^{-1}\underline{x}_i + \frac{\pi}{16} \qquad (n=3)$$
$$= -\frac{1}{5}(1-\underline{x}_i^2)^{\frac{3}{2}}(\underline{x}_i^2 + \frac{2}{3}) \qquad (n=4)$$
$$\cdots\cdots \tag{4-150}$$

3. 求压力分布

由(4-142)式，得到

$$\{a_{nm}\} = [J_{nm}]^{-1}\{W(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_r)\}$$
$$= -[J_{nm}]^{-1}[[D] + ik[1]]\{h\} \tag{4-151}$$

式中[D]是微分矩阵，其元素由拉格朗日插值公式确定(见文献[19])。

压力分布系数 a_{nm} 的数目等于下洗配置点的数目($n \times m$)。在对称情况或者反对称情况下，a_{nm} 的数目减少为$\frac{1}{2}(n \times m)$个。

现在，我们概括一下计算压力分布系数 a_{nm} 的步骤：

(1) 对于给定的翼面形状，写出坐标变换式。

(2) 根据翼面的形状和结果准确度要求，选取必需的下洗配置点和相应的积分点数目。

(3) 由翼面的振动形态写出相应的下洗条件。

(4) 根据给定的 M、k 下计算核函数。

(5) 对(4-142)式施矩阵求逆,即得压力分布系数 a_{nm}。

本方法的关键在于确定压力分布系数 a_{nm}。一旦它被确定,代入(4-92)和(4-93)式,便可确定翼面上的压力分布。此外,剖面的升力系数、力矩系数和总升力系数、力矩系数以及颤振分析计算中用到的广义气动力均可求得。

亚音速核函数方法已成功地应用了多年。对于单独翼面,计算结果相当准确;而对于带有操纵面的机翼或尾翼,需要在压力分布的公式中引进由操纵面偏转而产生的不连续性。1960 年以后,亚音速核函数方法已逐步推广到翼—身组合体、T 形尾翼、串置机翼、上反翼以及十字形翼等。近年来的工作集中在研究数值积分的精度,下洗配置点的选择、压力分布函数的合理性以及用最经济的方式处理更为一般的外形等。

4. 计算例题

例 1　45°后掠翼(图 4-12)的振动气动力计算。

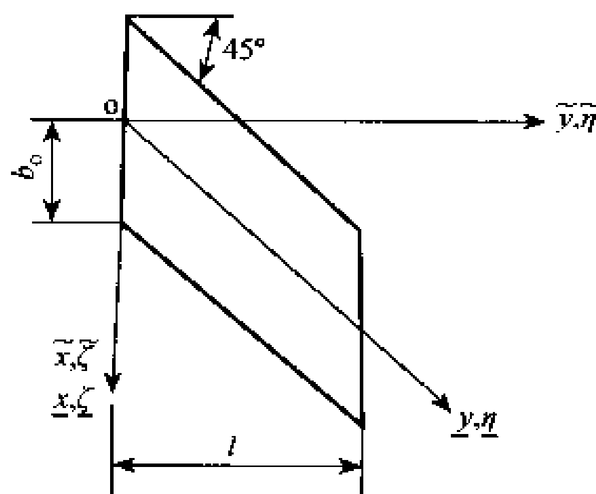


图 4-12　45°后掠翼的外形

坐标变换式：

$$\underline{x} = \tilde{x} - |\tilde{y}|$$

$$\underline{y} = \frac{b_0}{l}\tilde{y}$$

$$\frac{b_0}{l} = 2$$

$$b(\underline{\eta}) = b_0$$

$$x_l(y) = -b_0 + |y|$$

$$x_t(y) = b_0 + |y|$$

在对称运动情况下，半个翼面上选取 9 个下洗配置点，其坐标列于表 4-3。相应的积分点共选取 21 个（弦向 3 个，展向 7 个），其坐标列于表 4-4。

表 4-3 下洗配置点的坐标

$\underline{y}_r$ \ $\underline{x}_i$	p	$\underline{y}_1$	$\underline{y}_2$	$\underline{y}_3$
		0.222 52	0.623 49	0.900 97
$\underline{x}_1$	−0.623 49	1	4	7
$\underline{x}_2$	−0.222 52	2	5	8
$\underline{x}_3$	0.900 97	3	6	9

表 4-4 积分点的坐标

$\underline{\eta}_s$ \ $\underline{\xi}_j$	$\underline{q}$	$\underline{\eta}_1$	$\underline{\eta}_2$	$\underline{\eta}_3$	$\underline{\eta}_4$	$\underline{\eta}_5$	$\underline{\eta}_6$	$\underline{\eta}_7$
		−0.974 93	−0.781 83	−0.433 88	0	0.433 88	0.781 83	0.974 93
$\underline{\xi}_1$	−0.900 97	1	4	7	10	13	16	19
$\underline{\xi}_2$	−0.222 52	2	5	8	11	14	17	20
$\underline{\xi}_3$	0.623 49	3	6	9	12	15	18	21

45°后掠翼作单位平移和俯仰运动（绕 70％根部弦点）时，下洗条件分别是：

对于平移运动 $\{\overline{W}\} = -\begin{Bmatrix} 0.4i \\ 0.4i \\ \vdots \\ 0.4i \end{Bmatrix}_{(9\times1)} \left\{\frac{h}{b_0}\right\}$

其中$\frac{h}{b_0}=1$

对于俯仰运动 $\{\overline{W}\} = \begin{Bmatrix} 1+0.4(\widetilde{x_1}-\widetilde{x_k}) \\ 1+0.4(\widetilde{x_2}-\widetilde{x_k}) \\ \vdots \\ 1+0.4(\widetilde{x_9}-\widetilde{x_k}) \end{Bmatrix}_{(9\times1)} \cdot \overline{\alpha}$

其中$\overline{\alpha}=1$，$\widetilde{x_k}=0.4$。

将下洗条件代入(4-151)式，可求得压力分布系数 a_{nm}。对于 $M=0$，$k=0.4$ 和 $M=0.8$，$k=0.4$ 时的 a_{nm}，列写在表 4-5。

此时，剖面的升力系数：

$$C_l = 4\left(\frac{l}{b_0}\right)\sqrt{1-\overline{y}^2}\{[a_{00}+a_{02}\,\overline{y}^2+a_{04}\,\overline{y}^4]\pi +$$
$$[a_{10}+a_{12}\,\overline{y}^2+a_{14}\,\overline{y}^4]\frac{\pi}{2}\}$$

表 4-5 压力分布系数 a_{nm}

	$M=0$,	$k=0.4$	$M=0.8$,	$k=0.4$
运动类型 / a_{nm}	平移运动	俯仰运动	平移运动	俯仰运动
a_{00}	−0.002 695 −0.052 08i	0.134 1 −0.022 88i	−0.010 93 −0.044 98i	0.119 8 −0.051 97i
a_{02}	−0.002 752 −0.012 62i	0.031 96 +0.070 20i	−0.015 61 −0.016 23i	0.061 93 +0.023 45i
a_{04}	−0.009 167 −0.042 0i	0.109 6 −0.011 87i	−0.010 23 −0.055 34i	0.137 8 −0.006 151i

	$M=0$,	$k=0.4$	$M=0.8$,	$k=0.4$
a_{nm} \ 运动类型	平移运动	俯仰运动	平移运动	俯仰运动
a_{10}	0.030 45 +0.017 19i	−0.047 96 +0.173 6i	0.035 37 −0.009 045i	0.029 37 +0.208 5i
a_{12}	0.001 483 +0.009 117i	−0.085 15 −0.015 53i	0.041 20 +0.021 35i	−0.171 9 +0.122 4i
a_{14}	0.027 66 +0.088 24i	−0.215 7 +0.017 35i	0.023 08 +0.113 4i	−0.262 8 −0.014 77i
a_{20}	0.001 414 −0.022 68i	0.043 09 +0.008 627i	0.010 95 −0.005 373i	−0.017 75 +0.033 30i
a_{22}	−0.001 938 +0.082 59i	−0.211 1 −0.095 47i	−0.051 36 +0.152 6i	−0.357 87 −0.374 7i
a_{24}	−0.022 21 −0.162 4i	0.398 0 +0.085 77i	−0.013 28 −0.260 3i	0.623 2 +0.243 7i

剖面的力矩系数(绕当地的翼弦中点):

$$C_{m_{\frac{1}{2}c}}=-2\left(\frac{l}{b_0}\right)\sqrt{1-\bar{y}^2}\left\{[a_{00}+a_{02}\bar{y}^2+a_{04}\bar{y}^4]\left(-\frac{\pi}{2}\right)+[a_{20}+a_{22}\bar{y}^2+a_{24}\bar{y}^4]\frac{\pi}{8}\right\}$$

总升力系数:

$$C_L=\left(\frac{l}{b_0}\right)^2\pi^2\left\{\frac{1}{2}\left[a_{00}+\frac{a_{10}}{2}\right]+\frac{1}{8}\left[a_{02}+\frac{a_{12}}{2}\right]+\frac{1}{16}\left[a_{04}+\frac{a_{14}}{2}\right]\right\}$$

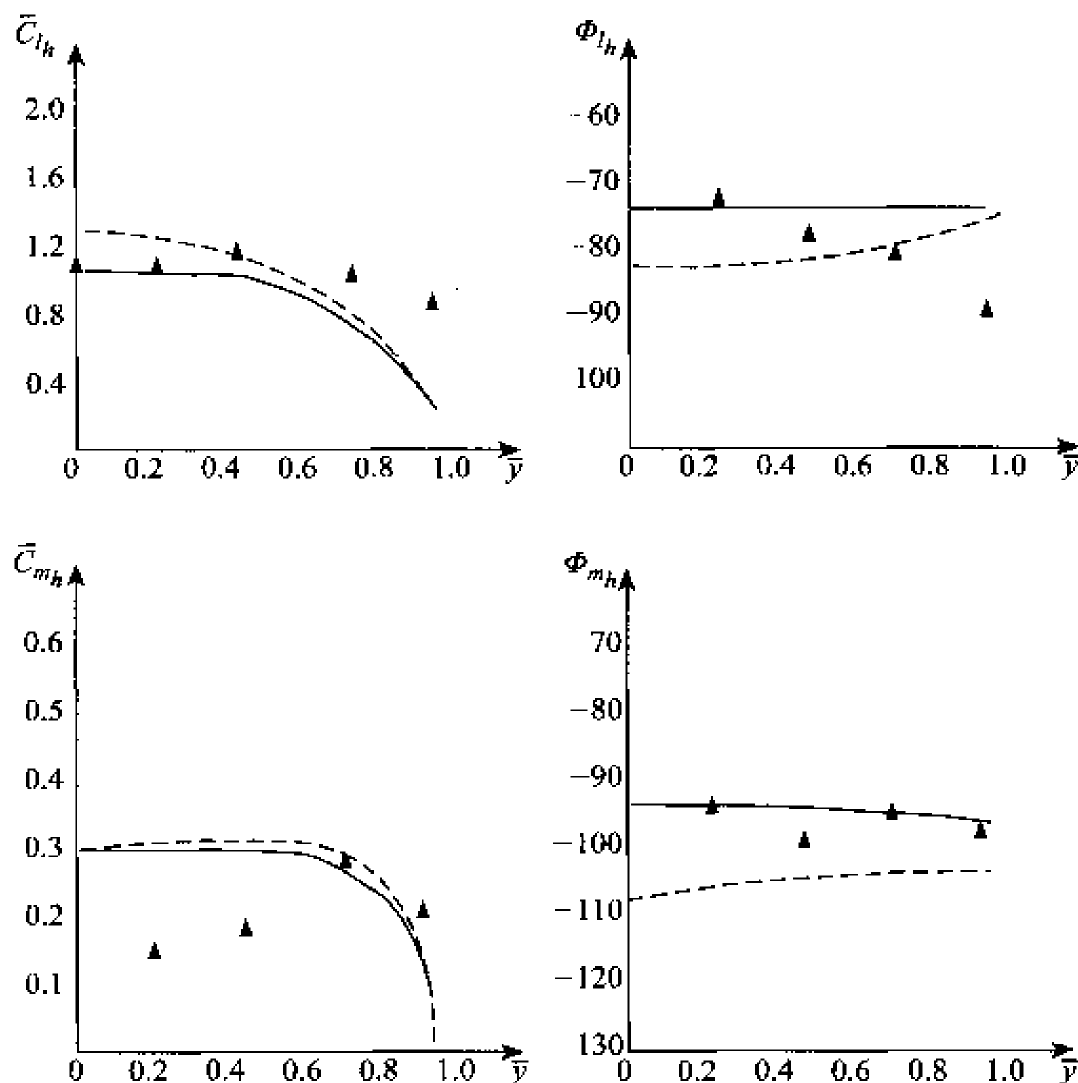
总力矩系数:

$$C_{M_{\frac{1}{2}根弦}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{l}{b_0}\right)^2\pi\left\{\left[\frac{a_{00}}{2}+\frac{a_{02}}{8}+\frac{a_{04}}{16}\right]\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\left[\frac{a_{20}}{2}+\frac{a_{22}}{8}+\frac{a_{24}}{16}\right]\frac{\pi}{8}+4\left[\frac{a_{00}}{3}+\frac{2a_{02}}{15}+\frac{8a_{04}}{105}\right]+2\left[\frac{a_{10}}{3}+\frac{2a_{12}}{15}+\frac{8a_{14}}{105}\right]\right\}$$

对应的相位角为

$$\Phi_L = \mathrm{tg}^{-1} \frac{(C_L)_I}{(C_L)_R}$$

当 $M=0$，$k=0.4$ 和 $M=0.8$，$k=0.4$ 时，C_l，$C_{m\frac{1}{2}c}$ 沿翼展的分布曲线如图 4-13 所示；总升力系数 C_L 和总力矩系数 C_M 见表 4-6。

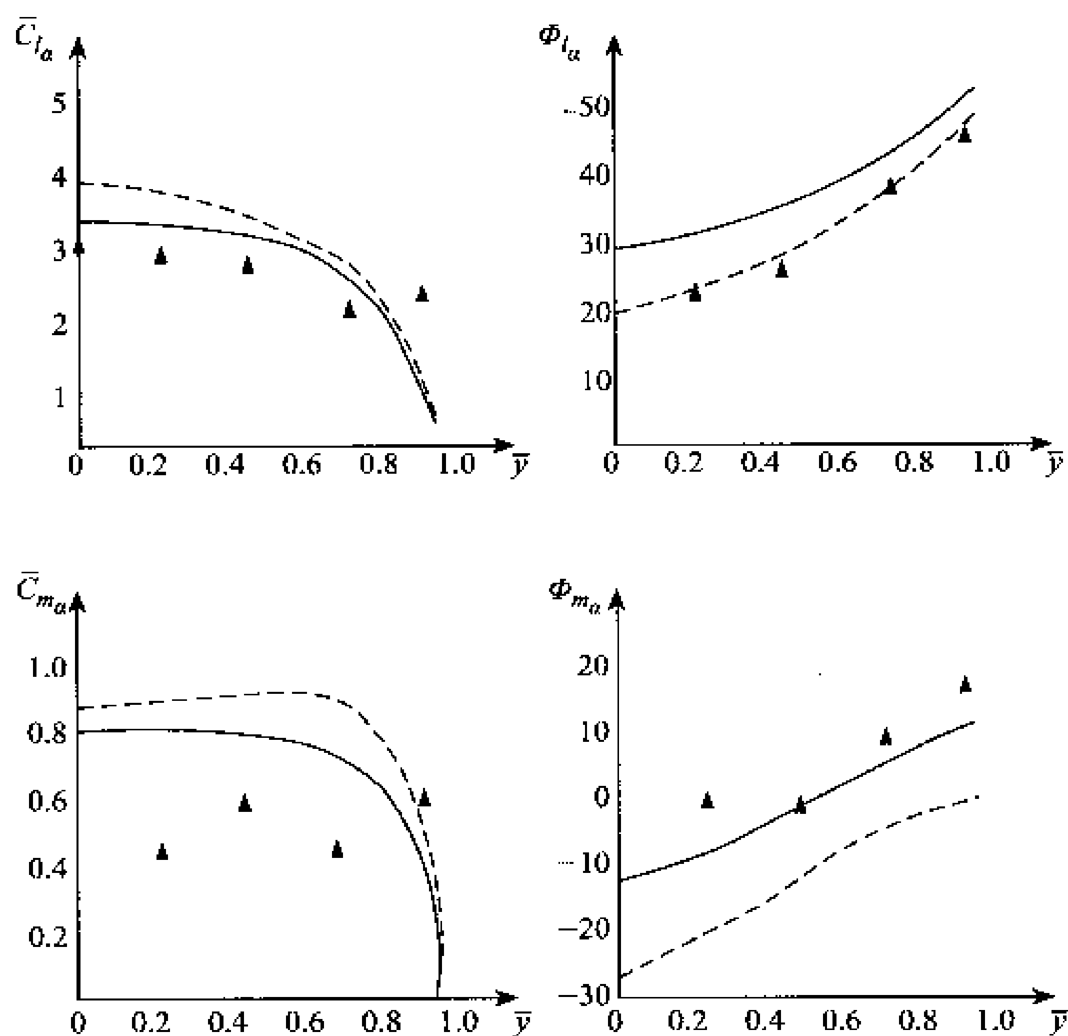


(1)平移运动时的展向升力和力矩(绕当地中弦点)分布

—— $M=0$　$k=0.4$

– – – – $M=0.8$　$k=0.4$

▲　非压缩流实验值　$k=0.397$ [参考文献17]



(2)俯仰运动时的展向升力和力矩(绕当地中弦点)分布

图 4-13　45°后掠翼的 C_l，$C_{m\frac{1}{2}c}$ 分布

表 4-6　45°后掠翼的总升力和力矩系数

	理论计算结果				试验结果[20]	
	$M=0.8$，$k=0.4$		$M=0$，$k=0.4$		$M=0$，$k=0.397$	
	幅值	相位角	幅值	相位角	幅值	相位角
C_{L_h}	1.014 1	−80.8°	0.925 3	−74.5°	1.00	−75.5°
C_{L_α}	2.918 2	29°	2.548 1	37.8°	2.30	28°
C_{M_h} 50%根弦	0.215 9	134.4°	0.171 6	139.5°	0.32	108°
C_{M_α} 50%根弦	0.930 4	−106.9°	0.785 2	−102.5°	0.68	−126°

$M=0.8$ 时的气动力系数值比 $M=0$ 时的大 10%到 30%左右，这是由于空气的压缩性效应所引起的。

理论计算结果与试验结果的差别，大概是由于下述原因产生的：

(1) 在压力分布公式中包括的项数可能还不够。例 1 中我们采用了 9 个压力分布系数，即在 9 个下洗配置点(弦向三个、展向三个)上满足机翼的下洗条件。看来对于大后掠角的翼面，需要包括更多的项数。

(2) 积分点的数目可能还不够。积分点的数目愈多，结果的准确度愈高。

例 2　方形翼的定常气动力计算($M=0.2$, $k=0$)。

坐标变换式为

$$\underline{x} = \bar{x}$$

$$\underline{y} = \frac{b_0}{l}\bar{y}$$

$$\frac{l}{b_0} < 1$$

$$b(\underline{y}) = b_0$$

同样地，在半个翼面上选取 9 个下洗配置点，在整个翼面上选取 21 个积分点，它们的坐标与表 4-3、表 4-4 相同。

当 $k=0$ 时，核函数具有下列的简单形式：

$$K(x_0, y_0, o, M) = -\frac{1}{y_0^2}\left(1 + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \beta^2 y_0^2}}\right)$$

若翼面以单位幅值绕中弦线作俯仰运动时，下洗条件为

$$\{\overline{W}\} = \{1\}\,\bar{\alpha}$$

其中 $\bar{\alpha}=1$。将上式代入(4-151)式，即可确定压力分布系数 a_{nm}。于是，总升力系数可按

$$C_L = 2\pi^2\left(\frac{l}{b_0}\right)^2\left\{\frac{1}{2}\left[a_{00} + \frac{a_{10}}{2}\right] + \frac{1}{8}\left[a_{02} + \frac{a_{12}}{2}\right] + \frac{1}{16}\left[a_{04} + \frac{a_{14}}{2}\right]\right\}$$

求出，其结果列于表 4-7，并与其他方法的结果作了比较。

表 4-7　方形翼的总升力系数

方　　法	C_L
奈德(文献[20])	1.50
试验值(外插结果)	1.40
NACA 核函数方法	1.31
本方法计算结果	1.515

§4. 跨音速核函数方法

跨音速区域($M\approx1$)的非定常气动力问题,一直被人们视为棘手的难题,至今尚未取得卓有成效的结果。从颤振观点来考察,该区域又是最危险的,无论是对于高亚音速和低超音速以至高超音速的飞行器均是如此。由于气动力导数在跨音速区域内达到最大,且变化剧烈,用理论方法通常是难以预测作用在翼面上的非定常气动力的。有时可用试验方法进行测量,文献[21]曾对一尖削机翼在马赫数从0.40到1.07范围内作俯仰振动时测定了气动升力、力矩以及压力分布。但是,值得指出的是,跨音速区域的风洞试验也存在着许多困难,对于颤振分析计算往往借助于理论的方法。概括起来,可把跨音速区按如下三种情况来处理:

(1) 亚音速的极限情况;

(2) 超音速的极限情况;

(3) 跨音速情况。

文献[22]视为跨音速非定常流的系统著作。我们参照文献[15]、[16]、[17]等,简述跨音速核函数方法。

下洗积分方程式写成如下形式:

$$W(x,y,t)=\iint_s \Delta p(\xi,\eta)K(x_0,y_0,k,M)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad (4\text{-}152)$$

上式中包括三部分,即下洗分布 $W(x,y)$,压力分布 $\Delta p(\xi,\eta)$ 以及核函数 $K(x_0,\ y_0,\ k,\ M)$。下洗分布是已知的,核函数的表达式是确

定的，只有压力分布是待求的。

下面，我们分别写出它们的表达式。

1. 下洗分布

$$W(x,y,t) = 4\rho U\,\overline{w_a}(x,y) = 4\rho U^2\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \mathrm{i}kh\right) \quad (4\text{-}153)$$

其中翼面的振动形态 $H(x,y,t)$ 以它的前几阶固有振型来近似，即

$$H(x,y,t) = h_1(x,y)\,q_1 + h_2(x,y)\,q_2 + \cdots + h_i(x,y)\,q_i$$
$$(i = 1,2\cdots) \quad (4\text{-}154)$$

式中$q_i(t)=\overline{q_i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$为第 i 个自由度的广义坐标，$h_i(x,y)$为正规化的第 i 阶固有振型。

2. 压力分布

假设压力分布表示为：

$$\Delta P(\xi,\eta) = 4\rho U^2\,\frac{l}{b_0}L(\xi,\eta) \quad (4\text{-}155)$$

式中 $L(\xi,\eta)$为无因次的载荷分布函数，即

$$L(\xi,\eta) = \frac{b_0}{b(\eta)}\sqrt{1-\eta^2}\Big\{[a_{00} + a_{01}\eta + a_{02}\eta^2 + \cdots]\frac{1}{\sqrt{1+\xi}} +$$
$$[a_{10} + a_{11}\eta + a_{12}\eta^2 + \cdots]\sqrt{1+\xi} +$$
$$[a_{20} + a_{21}\eta + a_{22}\eta^2 + \cdots](1+\xi)^{\frac{3}{2}} + \cdots\Big\} \quad (4\text{-}156)$$

或者，简写为

$$L(\xi,\eta) = \frac{b}{b(\eta)}\sum_n\sum_m f_{nm}(\xi,\eta)a_{nm} \quad (4\text{-}157)$$

其中
$$f_{nm}(\xi,\eta) = F_n(\xi)\cdot\eta^m\sqrt{1-\eta^2} \quad (4\text{-}158)$$

$$F_n(\xi) = (1+\xi)^{n-\frac{1}{2}} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\cdots) \quad (4\text{-}159)$$

对称运动时，$W(x,y)=W(x,-y)$，在(4-158)式中仅保留 η 的偶次方项；反对称运动时，$W(x,y)=-W(x,-y)$，在(4-158)式中仅保留 η 的奇次方项。

3. 核函数

$$
\begin{aligned}
K(x_0, y_0, k, M=1) = k^2 e^{-ikx_0} \Bigg\{ & \frac{1}{k|y_0|} K_1(k|y_0|) + \\
& \frac{\pi i}{2k|y_0|}\left[I_1(k|y_0|(-L_1(k|y_0|) - \frac{2}{\pi} \right] + \\
& \frac{2}{k^2 y_0^2}\left\{ \exp\left[\frac{i}{2}\left(kx_0 - \frac{k^2 y_0^2}{kx_0}\right)\right] - \frac{1}{2} \right\} - \\
& \frac{i}{k^2 y_0^2}\int_{k|y_0|}^{kx_0} \exp\left[\frac{i}{2}\left(\lambda - \frac{k^2 y_0^2}{\lambda}\right)\right] d\lambda \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{4-160}
$$

其中 k 为减缩频率($k=\frac{b_0 w}{U}$),M 为马赫数,$K_1(k|y_0|)$为第二类一阶修正的贝塞尔函数,$I_1(k|y_0|)$为第一类一阶修正的贝塞尔函数,$L_1(k|y_0|)$为一阶修正的斯道维函数。$x_0=x-\xi$, x, ξ 均以 b_0 无因次化;$y_0=y-\eta$, y, η 均以 l 无因次化(图 4-14)。

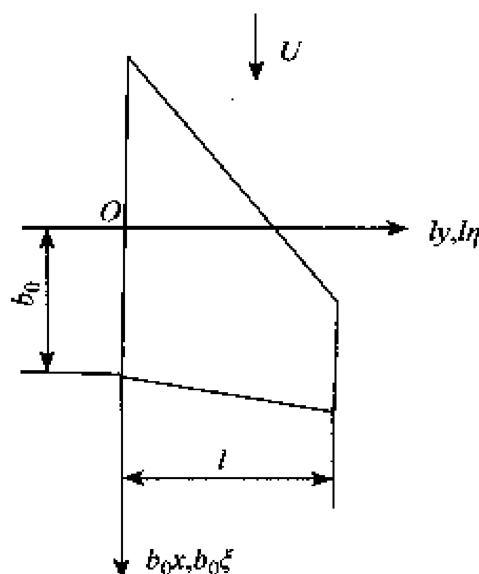


图 4-14　机翼的平面形状(跨音速核函数法)

当 $x_0<0$ 时,由于线性跨音速流中没有上游影响,核函数 $K(x_0, y_0, k, M=1)=0$。因此,在跨音速($M=1$)的情况下,(4-152)式的积分区域仅限于 $x_0\geqslant 0$ 或者 $x\geqslant\xi$。

在完成(4-152)式的积分时，$x=\xi$ 处的弦向积分出现间断，可按下式处理：

$$I_{弦} = \int_{-1}^{\xi_s} f_n(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi + \int_{\xi_r}^{+1} f_n(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi \tag{4-161}$$

在 $y=\eta$ 处，展向积分中出现二阶奇异。此时，按文献[14]中提供的方法处理。对于不出现奇异积分的区域，用高斯公式完成数值积分。在$y=\eta$附近的一个很小的区间内，用六次多项式逼近展向积分中的被积函数，展向积分时对一阶奇异取柯西值，对二阶奇异取无穷积分的有限部分。

与亚音速核函数方法一样，最后也是为了确定满足已知的下洗条件的压力分布系数 a_{nm}。

这里以展弦比为 2 的矩形翼绕中弦线作俯仰振动时(减缩频率 $k=0.44$)的总升力和力矩系数作为一个示例(见图 4-15)。从图中可知，总升力系数无论是按核函数方法还是按跨音速理论[22]比较接近；而对总力矩系数，二者差异较大。

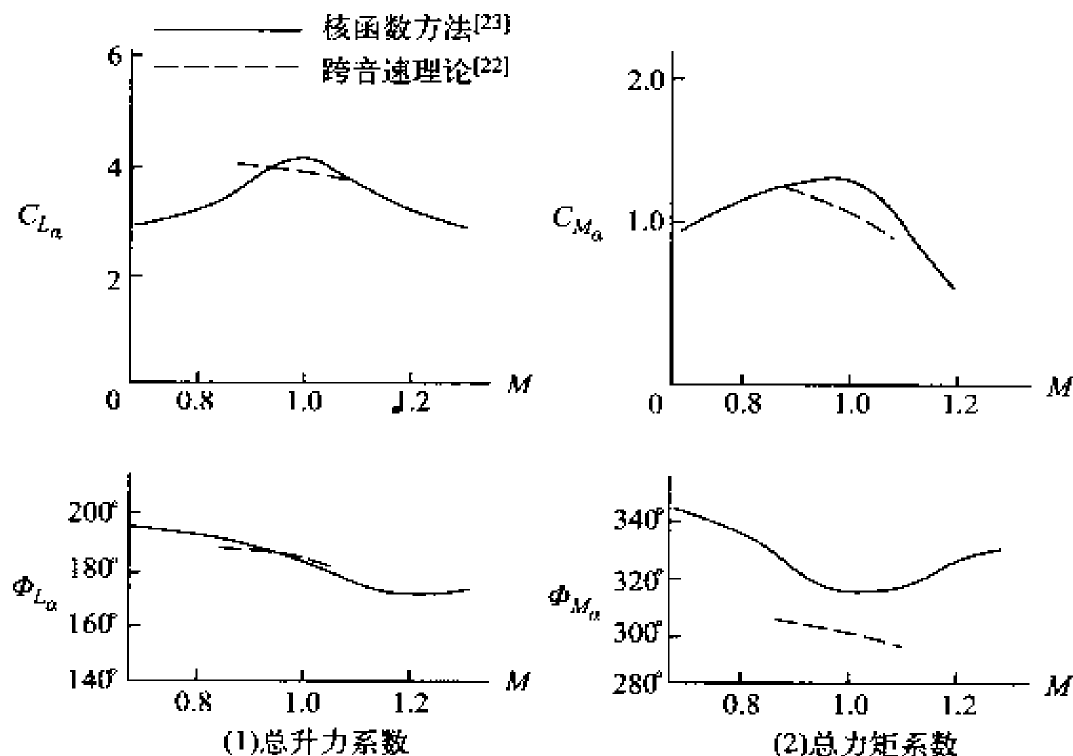


图 4-15 矩形翼作俯仰振动时的总升力和力矩系数

§5. 超音速狭条理论

按照范达克(Van Dyke)二次非线性非定常超音速流理论[25],对于具有超音速前缘并作平移和俯仰运动的二元后掠翼(图 4-16),其压力系数为

$$C_p = (C_{p_\alpha} + C_{p_{x_0}} \cdot x_0)\alpha + C_{p_h} \cdot h \tag{4-162}$$

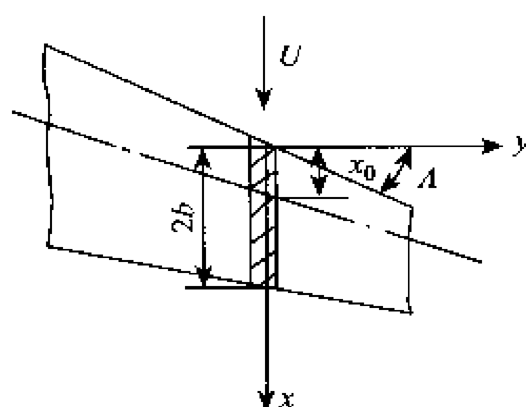


图 4-16　超音速流的二元后掠翼

其中 x_0 为俯仰参考轴的位置。

单位宽度上的升力和力矩由压力系数求得:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y} &= \left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)\int_0^{2b} C_p \mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)\int_0^{2b}[(C_{p_\alpha} + x_0 C_{p_{x_0}})\alpha + C_{p_h} \cdot h]\mathrm{d}x \\
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y} &= \left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)\int_0^{2b}(x - x_0)C_p \mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)\int_0^{2b}(x - x_0)[(C_{p_\alpha} + x_0 C_{p_{x_0}})\alpha + C_{p_h} \cdot h]\mathrm{d}x
\end{aligned}\right\} \tag{4-163}$$

宽度为 Δy 的狭条上的升力和力矩分别由两部分组成，即

$$
\left.\begin{aligned}
L &= \left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)\int \mathrm{d}y \int C_p \mathrm{d}x \\
&= 4\rho\omega^2 b^3 \Delta y \left(L_h \cdot \frac{h}{b} + L_\alpha \cdot \alpha\right) \\
M &= \left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)\int \mathrm{d}y \int (x - x_0) C_p \mathrm{d}x \\
&= 4\rho\omega^2 b^4 \Delta y \left(M_h \cdot \frac{h}{b} + M_\alpha \cdot \alpha\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4-164}
$$

由此可知，

$$
\left.\begin{aligned}
L_h &= \left(\frac{1}{8}k^2\right)\int_0^{2b} C_{p_h} \mathrm{d}x \\
L_\alpha &= \left(\frac{1}{4}k^2\right)\left(\frac{1}{2b}\right)\int_0^{2b} (C_{p_\alpha} + x_0 C_{p_{x_0}}) \mathrm{d}x \\
M_h &= \left(\frac{1}{4}k^2\right)\left(\frac{1}{2b}\right)\int_0^{2b} (x - x_0) C_{p_h} \mathrm{d}x \\
M_\alpha &= \left(\frac{1}{2}k^2\right)\left(\frac{1}{2b}\right)^2\int_0^{2b} (x - x_0)(C_{p_\alpha} + x_0 C_{p_{x_0}}) \mathrm{d}x
\end{aligned}\right\} \tag{4-165}
$$

若用前缘的气动力表示，(4-165)式改写为

$$
\left.\begin{aligned}
L_h &= L_{h_0} \\
L_\alpha &= L_{\alpha_0} - \left(\frac{x_0}{b}\right)L_{h_0} \\
M_h &= M_{h_0} - \left(\frac{x_0}{b}\right)L_{h_0} \\
M_\alpha &= M_{\alpha_0} - \left(\frac{x_0}{b}\right)(M_{h_0} + L_{\alpha_0}) + \left(\frac{x_0}{b}\right)^2 L_{h_0}
\end{aligned}\right\} \tag{4-166}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
L_{h_0} &= \left(\frac{1}{8}k^2\right)\int_0^{2b} C_{p_h}\,\mathrm{d}x \\
L_{a_0} &= \left(\frac{1}{4}k^2\right)\left(\frac{1}{2b}\right)\int_0^{2b} C_{p_a}\,\mathrm{d}x \\
M_{h_0} &= \left(\frac{1}{4}k^2\right)\left(\frac{1}{2b}\right)\int_0^{2b} xC_{p_h}\,\mathrm{d}x \\
M_{a_0} &= \left(\frac{1}{2}k^2\right)\left(\frac{1}{2b}\right)^2\int_0^{2b} xC_{p_a}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}\right\} \tag{4-167}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
C_{p_a} = {} & \left(a_{01} + a_{02}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}\right) + i\left(\frac{k}{2b}\right)\left(a_{11}x + a_{13}\tau + a_{15}x\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}\right) + \\
& (k/2b)^2\left(a_{21}x^2 + a_{23}\int_0^x \tau\,\mathrm{d}\xi + a_{25}x\tau + a_{27}x^2\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}\right) + \\
& (k/2b)^3\left(a_{31}x^3 + a_{33}\int_0^x \xi\tau\,\mathrm{d}\xi + a_{35}x\int_0^x \tau\,\mathrm{d}\xi + \right.\\
& \left. a_{37}x^2\tau + a_{39}x^3\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}\right) \\
C_{p_h} = {} & -C_{p_{x_0}} = -i(k/2b)\left(a_{12} + a_{14}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}\right) - \\
& (k/2b)^2\left(a_{22}x + a_{24}\tau + a_{26}x\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}\right) - \\
& i(k/2b)^3\left(a_{32}x^2 + a_{34}\int_0^x \tau\,\mathrm{d}\xi + a_{36}x\tau + a_{38}x^2\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}\right)
\end{aligned} \tag{4-168}
$$

将 C_{p_a}，C_{p_h} 的表达式代入(4-167)式，须计算无因次的厚度积分：

$$
\begin{aligned}
I_n &= (1/2b)^n\int_0^{2b} x^{n-1}\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,3,4,5) \\
J_n &= (1/2b)^{n+1}\int_0^{2b} x^{n-1}\tau\,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,3,4) \\
K_n &= (1/2b)^{n+2}\int_0^{2b} x^{n-1}\,\mathrm{d}x\int_0^x \tau\,\mathrm{d}\xi \quad (n = 1,2,3) \\
L_n &= (1/2b)^{n+3}\int_0^{2b} x^{n-1}\,\mathrm{d}x\int_0^x \xi\tau\,\mathrm{d}\xi \quad (n = 1,2)
\end{aligned} \tag{4-169}
$$

在文献[26]中给出了一双凸面翼型的厚度积分。$\tau(x)$为翼剖面的半厚度函数。

完成(4-169)式的积分，得到对前缘的气动力系数：

$$\left.\begin{aligned} L_{h_0} &= A_2 + i(A_3/k + A_4 \cdot k) \\ L_{a_0} &= (B_1/k^2 + B_2) + i(B_3/k + B_4 \cdot k) \\ M_{h_0} &= C_2 + i(C_3/k + C_4 k) \\ M_{a_0} &= (D_1/k^2 + D_2) + i(D_3/k + D_4 \cdot k) \end{aligned}\right\} \tag{4-170}$$

式中

$$\begin{aligned} A_2 &= -(1/8)(a_{22}/2 + J_1 a_{24} + I_2 a_{26}) \\ A_3 &= -(1/8)(a_{12} + I_1 a_{14}) \\ A_4 &= -(1/8)(a_{32}/3 + K_1 a_{34} + J_2 a_{36} + I_3 a_{38}) \\ B_1 &= (1/4)(a_{01} + I_1 a_{02}) \\ B_2 &= (1/4)(a_{21}/3 + K_1 a_{23} + J_2 a_{25} + I_3 a_{27}) \\ B_3 &= (1/4)(a_{11}/2 + J_1 a_{13} + I_2 a_{15}) \\ B_4 &= (1/4)(a_{31}/4 + L_1 a_{33} + K_2 a_{35} + J_3 a_{37} + I_4 a_{39}) \\ C_2 &= -(1/4)(a_{22}/3 + J_2 a_{24} + I_3 a_{26}) \\ C_3 &= -(1/4)(a_{12}/2 + I_2 a_{14}) \\ C_4 &= -(1/4)(a_{32}/4 + K_2 a_{34} + J_3 a_{36} + I_4 a_{38}) \\ D_1 &= (1/2)(a_{01}/2 + I_2 a_{02}) \\ D_2 &= (1/2)(a_{21}/4 + K_2 a_{23} + J_3 a_{25} + I_4 a_{27}) \\ D_3 &= (1/2)(a_{11}/3 + J_2 a_{13} + I_3 a_{15}) \\ D_4 &= (1/2)(a_{31}/5 + L_2 a_{33} + K_3 a_{35} + J_4 a_{37} + I_5 a_{39}) \end{aligned} \tag{4-171}$$

以及

$$
\begin{aligned}
a_{01} &= -4/\bar{\beta} \cdot \cos\Lambda \\
a_{02} &= -(4/\bar{\beta}^2)(\bar{M}^2\bar{N}-2) \\
a_{11} &= (8/\bar{\beta}^3)(2-\bar{M}^2)\cos\Lambda \\
a_{12} &= 8/\bar{\beta} \cdot \cos\Lambda \\
a_{13} &= (16\bar{M}^2/\bar{\beta}^4)(\bar{N}-1) \\
a_{14} &= (8/\bar{\beta}^2)(\bar{M}^2\bar{N}-2) \\
a_{15} &= (8/\bar{\beta}^4)(2-\bar{M}^2)(\bar{M}^2\bar{N}-1) \\
a_{21} &= (4/\bar{\beta}^5)(\bar{M}^2+2)\cos\Lambda \\
a_{22} &= 16/\bar{\beta}^3 \cdot \cos\Lambda \\
a_{23} &= (8\bar{M}^2/\bar{\beta}^6)[3(3\bar{M}^2-2)\bar{N}-2(5\bar{M}^2-3)] \\
a_{24} &= (8\bar{M}^2/\bar{\beta}^4)(4\bar{N}-5) \\
a_{25} &= (4\bar{M}^2/\bar{\beta}^6)[(16-7\bar{M}^2)\bar{N}+4(2\bar{M}^2-3)] \\
a_{26} &= (16\bar{M}^2/\bar{\beta}^4)(\bar{N}-1) \\
a_{27} &= (4\bar{M}^2/\bar{\beta}^6)[(\bar{M}^2+2)\bar{N}-4] \\
a_{31} &= -(8\bar{M}^2/3\bar{\beta}^7)(\bar{M}^4+4)\cos\Lambda \\
a_{32} &= -24\bar{M}^2/\bar{\beta}^5\cos\Lambda \\
a_{33} &= (16\bar{M}^2/\bar{\beta}^8)[(17\bar{M}^4-10\bar{M}^2-4)\bar{N}-(5\bar{M}^2-2)(4\bar{M}^2-1)] \\
a_{34} &= (16\bar{M}^2/\bar{\beta}^6)[6\bar{M}^2-(5\bar{M}^2-2)\bar{N}] \\
a_{35} &= (16\bar{M}^2/\bar{\beta}^8)[7\bar{M}^2(2\bar{M}^2-1)-(12\bar{M}^4-3\bar{M}^2-4)\bar{N}] \\
a_{36} &= (8\bar{M}^2/\bar{\beta}^6)[2(\bar{M}^2+1)-(\bar{M}^2+8)\bar{N}] \\
a_{37} &= (8\bar{M}^2/\bar{\beta}^8)[(3\bar{M}^2+2)-(3\bar{M}^2+4)\bar{N}] \\
a_{38} &= (8\bar{M}^2/\bar{\beta}^6)[2(\bar{M}^2+1)-3\bar{M}^2\bar{N}] \\
a_{39} &= (8\bar{M}^2/3\bar{\beta}^8)[(5\bar{M}^2+2)-\bar{M}^2\bar{N}(\bar{M}^2+4)]
\end{aligned}
\tag{4-172}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
\bar{\beta} &= (\overline{M}^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \\
\overline{N} &= [(\gamma + 1)/2](\overline{M}^2/\bar{\beta}^2) \\
\overline{M} &= M\cos\Lambda
\end{aligned}\right\} \tag{4-173}
$$

γ 为比热比，对于空气 $\gamma=1.4$；Λ 为机翼后掠角，M 为马赫数。

一般，气动力系数是对 1/4 弦处而言的，此时 $\frac{x_0}{b}=\frac{1}{2}$。

以上，为二元超音速解。由于能较好地计及非线性的厚度效应，在实际的颤振分析计算当中，它有实用价值。

把二元理论用到三元机翼时，须考虑翼尖效应。尽管作用在翼尖部分的非定常气动力不大，但它在颤振分析中起着极为重要的作用，于是我们对翼尖马赫锥区的振动气动力系数进行有限翼展修正（图 4-17）。

图 4-17 超音速的翼尖马赫锥

利用定常超音速线性理论的方法，在翼尖马赫锥内引进修正因

子：

$$F(\beta\eta/\xi) = (2/\pi)\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{-\frac{1+\mathrm{tg}\Lambda/\beta}{1+\xi/\beta\eta}} \tag{4-174}$$

因此，狭条上的升力和力矩为

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\rho U^2\int \mathrm{d}y\int c_p \cdot F(\beta\eta/\xi)\mathrm{d}x \\ M &= \frac{1}{2}\rho U^2\int \mathrm{d}y\int (x-x_0)c_p \cdot F(\beta\eta/\xi)\mathrm{d}x \end{aligned}\right\} \tag{4-175}$$

在翼尖马赫锥内，以三元系数代替二元系数，(4-171)式的系数变成：

$$\left.\begin{aligned} A_2' &= f_2A_2, & c_2' &= f_3c_2 \\ A_3' &= f_1A_3, & c_3' &= f_2c_3 \\ A_4' &= f_3A_4, & c_4' &= f_4c_4 \\ B_1' &= f_1B_1, & D_1' &= f_2D_1 \\ B_2' &= f_3B_2, & D_2' &= f_4D_2 \\ B_3' &= f_2B_3, & D_3' &= f_3D_3 \\ B_4' &= f_4B_4, & D_4' &= f_5D_4 \end{aligned}\right\} \tag{4-176}$$

修正因子具有下列形式：

$$\begin{aligned} f_1 &= 1-(1/2b\cdot\Delta y)Q_1 \\ f_2 &= 1-(1/2b^2\cdot\Delta y)(Q_2+\mathrm{e}Q_1) \\ f_3 &= 1-(3/8b^3\cdot\Delta y)(Q_3+2\mathrm{e}Q_2+\mathrm{e}^2Q_1) \\ f_4 &= 1-(1/4b^4\cdot\Delta y)(Q_4+3\mathrm{e}Q_3+3\mathrm{e}^2Q_2+\mathrm{e}^3Q_1) \\ f_5 &= 1-(5/32b^5\cdot\Delta y)(Q_5+4\mathrm{e}Q_4+6\mathrm{e}^2Q_3+4\mathrm{e}^3Q_2+\mathrm{c}^4Q_1) \end{aligned} \tag{4-177}$$

其中

$$Q_m = \int_{d_i}^{-d_0}\mathrm{d}\eta\int_{-\beta\eta}^{\eta\mathrm{tg}\lambda+c_t}\xi^{m-1}[1-F(\beta\eta/\xi)]\mathrm{d}\xi \tag{4-178}$$

将[1－$F(\beta\eta/\xi)$]的三次多项式代入(4-178)式，能够得到满意的

结果，即

$$Q_m = \sum_{n=0}^{3} E_n R_{mn} \tag{4-179}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= 1 \\ E_1 &= (1/0.096)(0.8F_1 - 0.2F_2 + 0.096) \\ E_2 &= (1/0.096)(1.8F_1 - 1.2F_2 + 0.6) \\ E_3 &= (1/0.096)(F_1 - F_2 + 0.6) \\ F_1 &= (2/\pi)\mathrm{tg}^{-1}[(1/2)(1 + \mathrm{tg}\Lambda/\beta)^{1/2}] \\ F_2 &= (2/\pi)\mathrm{tg}^{-1}[2(1 + \mathrm{tg}\Lambda/\beta)^{1/2}] \end{aligned}\right\} \tag{4-180}$$

以及

$$R_{mn} = \int_{-d_i}^{-d_0} \mathrm{d}\eta \int_{-\beta\eta}^{\eta\mathrm{tg}\lambda/c_t} \xi^{m-1}(\beta\eta/\xi)^n \mathrm{d}\xi \tag{4-181}$$

关于 R_{mn} 的积分可见文献[26]的表 3。

在翼尖马赫锥区域进行三元修正时，应注意到以下两点：

(1)从翼尖处到狭条内侧的距离 d_i(见图 4-17)不能大于 $c_t/(\beta+\mathrm{tg}\lambda)$。在处理受翼尖马赫锥影响最小的一个狭条时，$d_i = c_t/(\beta+\mathrm{tg}\lambda)$。

(2)上述所作的三元修正适用于低频情况($k<1$)。

下面，我们引出高超音速狭条理论关于振动气动力系数的表达式，可把它视为上述超音速狭条理论的极限情况，其结果也就是下面要介绍的活塞理论的推广。

对不带操纵面的机翼剖面作平移和俯仰运动时，相对于前缘的振动气动力系数为：

$$\begin{aligned} L_{h_0} &= -\mathrm{i}K_1/k \\ L_{\alpha_0} &= -K_1/k^2 - \mathrm{i}K_2/k \\ M_{h_0} &= -\mathrm{i}K_2/k \\ M_{\alpha_0} &= -K_2/k^2 - \mathrm{i}K_3/k \end{aligned} \tag{4-182}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= (1/M)[c_1 + 2c_2MI_1 + 3c_3M^2(I_4 + \alpha_0^2)] \\ K_2 &= (1/M)[c_1 + 4c_2MI_2 + 3c_3M^2(2I_5 + \alpha_0^2)] \\ K_3 &= (4/3M)[c_1 + 6c_2MI_3 + 3c_3M^2(3I_6 + \alpha_0^2)] \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}183)$$

且

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= (\gamma + 1)/4 \\ c_3 &= (\gamma + 1)/12 \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}184)$$

α_0 为飞行器的定态位置(文献[31])。

若机翼后缘带有操纵面,须加上另外几项:

$$\begin{aligned} L_{\beta_0} &= -K_4/k^2 - \mathrm{i}(K_5 - 2K_4\xi_h)/k \\ M_{\beta_0} &= -K_5/k^2 - \mathrm{i}(K_6 - 2K_5\xi_h)/k \\ T_{h_0} &= -\mathrm{i}(K_5 - 2K_4\xi_h)/k \\ T_{\alpha_0} &= -(K_5 - 2K_4\xi_h)/k^2 - \mathrm{i}(K_6 - 2K_5\xi_h)/k \\ T_{\beta_0} &= -(K_5 - 2K_4\xi_h)/k^2 - \mathrm{i}(K_6 - 4K_5\xi_h + 4K_4\xi_h^2)/k \end{aligned} \quad (4\text{-}185)$$

式中 $\xi_h = x_h/2b$。(x_h 为最大厚度点的弦向坐标)。

$$\begin{aligned} K_4 &= (1/M)\{c_1(1 - \xi_h) + 2c_2MJ_1 + 3c_3M^2[J_4 + \alpha_0^2(1 - \xi_h^2)]\} \\ K_5 &= (1/M)\{c_1(1 - \xi_h^2) + 4c_2MJ_2 + 3c_3M^2[2J_5 + \alpha_0^2(1 - \xi_h^2)]\} \\ K_6 &= (4/3M)\{c_1(1 - \xi_h^2) + 6c_2MJ_3 + 3c_3M^2[3J_6 + \alpha_0^2(1 - \xi_h^2)]\} \end{aligned} \quad (4\text{-}186)$$

具有对称厚度分布 $2\tau(x)$ 的翼型,其厚度积分由两部分组成:一部分由前缘到最大厚度点,另一部分由最大厚度点到后缘(若有操纵面,由最大厚度点到操纵面的铰链轴线,再到后缘)。

$$
\left.
\begin{aligned}
I_n &= \begin{cases} (1/2b)^n \displaystyle\int_0^{2b} x^{n-1}\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x & (n = 1,2,3) \\ (1/2b)^{n-3} \displaystyle\int_0^{2b} x^{n-4}\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x & (n = 4,5,6) \end{cases} \\
J_n &= \begin{cases} (1/2b)^n \displaystyle\int_{x_h}^{2b} x^{n-1}\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x & (n = 1,2,3) \\ (1/2b)^{n-3} \displaystyle\int_{x_h}^{2b} x^{n-4}\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x & (n = 4,5,6) \end{cases}
\end{aligned}
\right\} \tag{4-187}
$$

在这一节中，我们还要介绍美国海军部编写的《超音速空气动力学手册》刊载的颤振空气动力系数表（见文献[27]）。该表格是根据线性理论制成的。表中的马赫数从 1.1 到 12，频率参数从 0.01 变化到 20。

设翼剖面作平移和俯仰振动（图 4-18）：

$$
\left.
\begin{aligned}
h &= h_0 c^{i\omega t} \\
\alpha &= \alpha_0 e^{i\omega t}
\end{aligned}
\right\} \tag{4-188}
$$

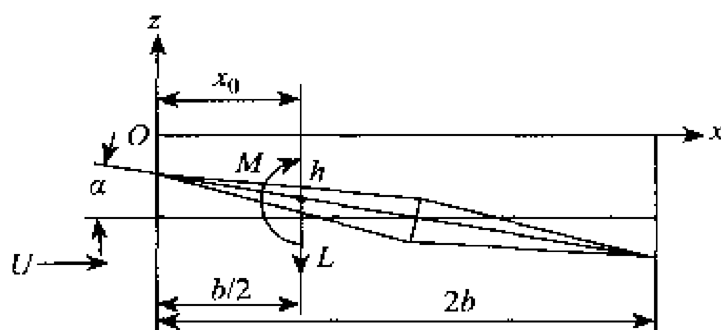


图 4-18　超音速翼型几何

机翼剖面上、下表面的压力差为

$$
\Delta P = -\frac{2\rho}{\beta}[U(\dot{h} + U\alpha - x_0\dot{\alpha})K(x) +
$$

$$
\int_0^x K(x-\xi)[\ddot{h} + 2U\dot{\alpha} + (\xi - x_0)\ddot{\alpha}]\mathrm{d}\xi \tag{4-189}
$$

其中

$$K(x-\xi)=e^{-i\frac{\omega U}{U^2-a^2}(x-\xi)}J_0\left[\frac{\omega a}{U^2-a^2}(x-\xi)\right] \tag{4-190}$$

J_0 为零阶贝塞尔函数。

于是，升力和力矩(绕 x_0 点)分别写为：

$$\left.\begin{aligned}L&=\int_0^{2b}\Delta p\mathrm{d}x\\M&=\int_0^{2b}\Delta p(x-x_0)\mathrm{d}x\end{aligned}\right\} \tag{4-191}$$

如图 4-18 所示，通常定义升力以向下为正，力矩以使翼剖面抬头为正。升力和力矩改写为：

$$\left.\begin{aligned}L&=L_h+L_\alpha\\M&=M_h+M_\alpha\end{aligned}\right\} \tag{4-192}$$

其中 $L_h, L_\alpha, M_h, M_\alpha$ 分别为平移和俯仰振动所引起的升力和力矩，表示为：

$$\left.\begin{aligned}L_h&=C_{L_h}\cdot\pi\rho b^2\omega^2 h\\L_\alpha&=C_{L_\alpha}\cdot\pi\rho b^3\omega^2\alpha\\M_h&=C_{M_h}\cdot\pi\rho b^3\omega^2 h\\M_\alpha&=C_{M_\alpha}\cdot\pi\rho b^4\omega^2\alpha\end{aligned}\right\} \tag{4-193}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}C_{L_h}&=\overline{C}_{L_h}+iC^*_{L_h}\\C_{L_\alpha}&=\overline{C}_{L_\alpha}+iC^*_{L_\alpha}\\C_{M_h}&=\overline{C}_{M_h}+iC^*_{M_h}\\C_{M_\alpha}&=\overline{C}_{M_\alpha}+iC^*_{M_\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{4-194}$$

根据所假设的马赫数和频率参数，从文献[27]的表中便可查出 $\overline{C}_{L_h}, C^*_{L_h}, \overline{C}_{L_\alpha}, C^*_{L_\alpha}, \overline{C}_{M_h}, C^*_{M_h}, \overline{C}_{M_\alpha}, C^*_{M_\alpha}$ 值。值得指出的是表中使用如下的频率参数：

$$\Omega = \frac{2M^2}{M^2 - 1} k \tag{4-195}$$

它是由马赫数和减缩频率组成的。

在使用电子数字计算机作颤振计算时，必须在机器内储存大量的表格数据。为减少数字的储存量，可先估算出颤振速度的大致范围。

§6. 超音速位势理论

基于对超音速飞机和导弹的全动舵面进行颤振分析，我们根据线性超音速位势理论（文献[28]、[29]、[30]），当垂直于舵面前缘或后缘的气流分量为超音速或至少为音速时，求得了舵面作平移、俯仰、朴振、滚转的简谐振动时的剖面升力、剖面力矩、总升力以及总力矩的表达式。

对于一后掠平板翼薄翼（图 4-19），扰动速度势的微分方程式为：

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Phi \tag{4-196}$$

按照小扰动假设，边界条件表示为：

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0} = W(x,y,t) = U\frac{\partial Z_m}{\partial x} + \frac{\partial Z_m}{\partial t} \tag{4-197}$$

其中，Z_m 为点(x,y)的位移，W 为点(x,y)的下洗值。

当翼面作平移和俯仰振动时，

$$\left.\begin{aligned} Z_m &= h + (x - x_0)\alpha \\ W(x,y,t) &= \dot{h} + U\alpha + (x - x_0)\dot{\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{4-198}$$

其中 x_0 为俯仰轴的位置。

当翼面作朴振振动时，

$$\left.\begin{aligned} Z_m &= -2bf\mid y\mid \\ W(x,y,t) &= -2b\dot{f}\mid y\mid \end{aligned}\right\} \tag{4-199}$$

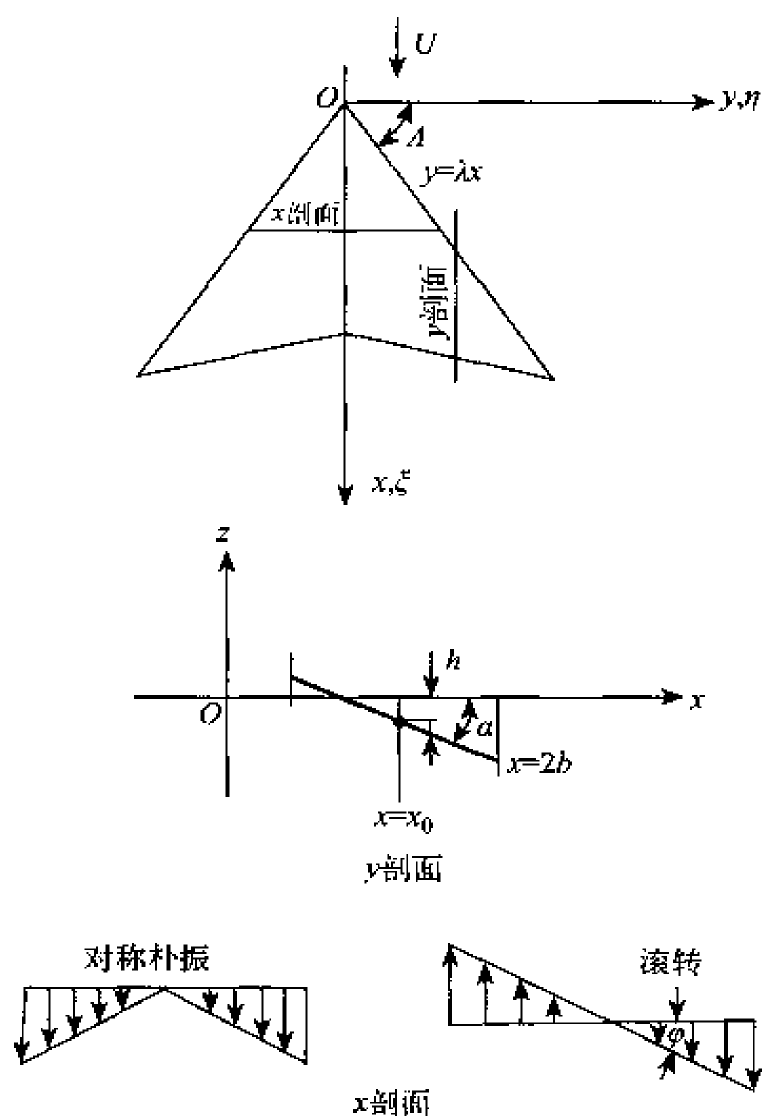


图 4-19　后掠平板薄翼的振动情况

其中$|y|$表示 y 的绝对值，$\dot{f}$ 为扑振角 f 对时间 t 的导数。

当翼面作滚转振动时，

$$\left.\begin{aligned} Z_m &= -2b\varphi \cdot y \\ W(x,y,t) &= -2b\dot{\varphi}y \end{aligned}\right\} \tag{4-200}$$

其中 φ 为滚转角。

根据线性条件，速度势由下列五个分量组成：

$$\Phi = \Phi_h + \Phi_a + \Phi_{\dot{a}} + \Phi_f + \Phi_{\varphi} \tag{4-201}$$

由于略去厚度的影响，而上、下表面是反对称的，只须考虑上表面($z=+0$)。因速度势在上下翼面的符号是相反的，则上、下表面的压力差为

$$\Delta p = -2\rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + U\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) \tag{4-202}$$

而速度势的积分形式：

$$\Phi(x, y, +0, t) = \frac{2b}{\pi}\iint_s \frac{W(\xi, \eta, t)}{R} e^{-i(x-\xi)\bar{\omega}} \cos\left(\frac{\bar{\omega}R}{M}\right) d\xi d\eta \tag{4-203}$$

式中 $\bar{\omega}=\dfrac{2kM^2}{\beta^2}$（$k$ 为减缩频率，$\beta=\sqrt{M^2-1}$）。

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2(y-\eta)^2}$$

(4-203)式对 ω 展开为马克劳林级数，并保留 $\bar{\omega}$ 的三次方项，则

$$\Phi(x, y, +0, t) = \frac{2b}{\pi}\iint_s W(\xi, \eta, t)\left(a_0\frac{1}{R} + a_1\frac{\xi}{R} + a_2\frac{\xi^2}{R} + a_3\frac{\xi^3}{R} + b_0 R + b_1 R\xi\right) d\xi d\eta \tag{4-204}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= 1 - i\bar{\omega}x - \frac{\bar{\omega}^2}{2}x^2 + i\frac{\bar{\omega}^3}{6}x^3 \\
a_1 &= i\bar{\omega} + \bar{\omega}^2 x - i\frac{\bar{\omega}^3}{2}x^2 \\
a_2 &= -\frac{\bar{\omega}^2}{2} + i\frac{\bar{\omega}^3}{2}x \\
a_3 &= -i\frac{\bar{\omega}^3}{6} \\
b_0 &= -\frac{\bar{\omega}^2}{2M^2} + i\frac{\bar{\omega}^3}{2M^2}x \\
b_1 &= -i\frac{\omega^3}{2M^2}
\end{aligned}\right\} \tag{4-205}$$

R, a_n, b_n 中的 ξ, η, ω 均为无因次量。

将(4-198)至(4-200)式的下洗值代入后，(4-204)式可分解为：

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{\dot h} &= -\frac{\dot h}{\pi}\Big[A\sqrt{x^2-\beta^2 y^2}+B_1\cos^{-1}\frac{x+\beta^2\lambda y}{\beta(\lambda x+y)}+\\
&\qquad B_2\cos^{-1}\frac{x-\beta^2\lambda y}{\beta(\lambda x-y)}\Big]=-\frac{\dot h}{\pi}F_1(x,y)\\
\Phi_\alpha &= -\frac{U\alpha}{\pi}F_1(x,y)\\
\Phi_{\dot\alpha} &= -\frac{\dot\alpha}{\pi}\Big[C\sqrt{x^2-\beta^2 y^2}+D_1\cos^{-1}\frac{x+\beta^2\lambda y}{\beta(\lambda x+y)}+\\
&\qquad D_2\cos^{-1}\frac{x-\beta^2\lambda y}{\beta(\lambda x-y)}-x_0F_1(x,y)\Big]
\end{aligned}\right\}\quad(4\text{-}206)$$

其中

$$A=\mathrm{i}\frac{\lambda x\bar\omega}{\sigma}+\frac{\lambda x^2\bar\omega^2}{6M^2\sigma^2}[M^2(4\sigma+3)+\sigma]+\frac{\lambda\beta^2y^2\bar\omega^2}{6M^2\sigma^2}(3M^2+\sigma)-$$

$$\mathrm{i}\frac{\lambda x^3\bar\omega^3}{72M^2\sigma^3}[M^2(18\sigma^2+31\sigma+15)+3\sigma(5\sigma+3)]-$$

$$\mathrm{i}\frac{\lambda\beta^2xy^2\bar\omega^3}{72M^2\sigma^3}[M^2(38\sigma+45)+3\sigma(4\sigma+9)]$$

$$B_1(x,y)=\frac{1}{\sigma^{1/2}}(\lambda x+y)-\mathrm{i}\frac{\lambda\beta^2\bar\omega}{2\sigma^{3/2}}(\lambda x+y)^2-$$

$$\frac{\beta^2\bar\omega^2}{12M^2\sigma^{5/2}}[M^2(2\sigma+3)+\sigma](\lambda x+y)^3+$$

$$\frac{\lambda\beta^4\bar\omega^3}{48M^2\sigma^{7/2}}[M^2(2\sigma+5)+3\sigma](\lambda x+y)^4$$

$$B_2(x,y)=B_1(x,-y)$$

$$C=\frac{\lambda x}{\sigma}-\mathrm{i}\frac{\lambda x^2\bar\omega}{3\sigma^2}(\sigma+3)-\mathrm{i}\frac{\lambda\beta^2y^2\omega}{\sigma^2}-\frac{\lambda x^3\omega^2}{24M^2\sigma^3}[M^2(2\sigma^2+$$

$$19\sigma+15)+\sigma(\sigma+3)]-\frac{\lambda\beta^2xy^2\bar\omega^2}{24M^2\sigma^3}[M^2(26\sigma+45)+9\sigma]$$

$$D_1(x,y)=-\frac{x}{\sigma^{3/2}}(\lambda x+y)-\frac{\lambda\beta^2y}{\sigma^{3/2}}(\lambda x+y)+\frac{\lambda\beta^2}{2\sigma^{3/2}}(\lambda x+y)^2-$$

$$\mathrm{i}\frac{\lambda\beta^2 x\bar{\omega}}{2\sigma^{3/2}}(\lambda x+y)^2+\mathrm{i}\frac{\beta^2\bar{\omega}}{6\sigma^{5/2}}(2\sigma+3)(\lambda x+y)^3+$$

$$\frac{\beta^2 x\bar{\omega}^2}{48M^2\sigma^{7/2}}[4M^2(4\sigma+5)-\sigma(\sigma-3)](\lambda x+y)^3+$$

$$\frac{\lambda\beta^4 y\bar{\omega}^2}{48M^2\sigma^{7/2}}[4M^2(2\sigma+5)+3\sigma](\lambda x+y)^3-$$

$$\frac{\lambda\beta^4\bar{\omega}^2}{48\sigma^{7/2}}(2\sigma+5)(\lambda x+y)^4$$

$$D_2(x,y)=D_1(x,-y) \tag{4-207}$$

又

$$\sigma=\beta^2\lambda^2-1$$
$$\beta^2=M^2-1$$
$$\lambda=\mathrm{tg}(90^\circ-\Lambda)=\cot\Lambda$$

以及

$$\left.\begin{aligned}\Phi_f&=-\frac{\dot{f}}{\pi}(2b)^2\Big[A_f\sqrt{x^2-\beta^2y^2}+A_f^*\tanh^{-1}\sqrt{\frac{x-\beta|y|}{x+\beta|y|}}+\\&\quad B_{1f}\cos^{-1}\frac{x+\beta^2\lambda y}{\beta(\lambda x+y)}+B_{2f}\cos^{-1}\frac{x-\beta^2\lambda y}{\beta(\lambda x-y)}\Big]\\\Phi_\varphi&=\frac{-\dot{\varphi}}{\pi}(2b)^2\Big[A_\varphi\sqrt{x^2-\beta^2y^2}-B_{1f}\cos^{-1}\frac{x+\beta^2\lambda y}{\beta(\lambda x+y)}+\\&\quad B_{2f}\cos^{-1}\frac{x-\beta^2\lambda y}{\beta(\lambda x-y)}\Big]\end{aligned}\right\} \tag{4-208}$$

其中

$$A_f=\alpha_{1f}x+\mathrm{i}2k(\alpha_{2f}x^2+\alpha_{3f}y^2)+4k^2(\alpha_{4f}x^3+\alpha_{5f}xy^2)+$$
$$\mathrm{i}8k^3(\alpha_{6f}x^4+\alpha_{7f}x^2y^2+\alpha_{8f}y^4)$$
$$A_f^*=\epsilon_{1f}y^2+4k^2\epsilon_{2f}y^4$$
$$B_{1f}(x,y)=\beta_{1f}(\lambda x+y)^2+\beta_{2f}\beta^2\lambda y(\lambda x+y)+$$
$$\mathrm{i}2k[\beta_{3f}(\lambda x+y)^3+\beta_{4f}\beta^2\lambda y(\lambda x+y)^2]+$$

$$4k^2[\beta_{5f}(\lambda x + y)^4 + \beta_{6f}\beta^2\lambda y(\lambda x + y)^3] +$$
$$i8k^3[\beta_{7f}(\lambda x + y)^5 + \beta_{8f}\beta^2\lambda y(\lambda x + y)^4]$$
$$B_{2f}(x, y) = B_{1f}(x, -y)$$
$$A_\varphi = a_{1\varphi}y + i2ka_{2\varphi}xy + 4k^2(a_{3\varphi}x^2y + a_{4\varphi}y^3) +$$
$$i8k^2(a_{5\varphi}x^3y + a_{6\varphi}xy^3) \qquad (4\text{-}209)$$

且 $\alpha_{1f} = \dfrac{\lambda^2}{\sigma}$

$$\alpha_{2f} = -\frac{M^2\lambda^2}{3\beta^2\sigma^2}(2\sigma + 3)$$

$$\alpha_{3f} = -\frac{M^2\lambda^2}{3\sigma^2}(\sigma + 3)$$

$$\alpha_{4f} = -\frac{M^2\lambda^2}{24\beta^4\sigma^3}[M^2(6\sigma^2 + 22\sigma + 15) + 2\sigma^2 + 3\sigma]$$

$$\alpha_{5f} = -\frac{M^2\lambda^2}{24\beta^2\sigma^3}[M^2(\sigma^2 + 35\sigma + 45) + 3\sigma^2 + 9\sigma]$$

$$\alpha_{6f} = \frac{M^4\lambda^2}{360\beta^6\sigma^4}[M^2(24\sigma^3 + 156\sigma^2 + 235\sigma + 105) +$$
$$24\sigma^3 + 75\sigma^2 + 45\sigma]$$

$$\alpha_{7f} = \frac{M^4\lambda^2}{360\beta^4\sigma^4}[M^2(2\sigma^3 + 283\sigma^2 + 900\sigma + 630) +$$
$$27\sigma^3 + 270\sigma^2 + 270\sigma]$$

$$\alpha_{8f} = \frac{M^4\lambda^2}{360\beta^2\sigma^4}[M^2(4\sigma^3 - 4\sigma^2 + 65\sigma + 105) -$$
$$6\sigma^3 + 15\sigma^2 + 45\sigma]$$

$$\beta_{1f} = -\frac{1}{2\sigma\sqrt{\sigma}}$$

$$\beta_{2f} = -\frac{1}{\beta^2\lambda\sqrt{\sigma}}$$

$$\beta_{3f} = \frac{M^2\lambda}{2\sigma^2\sqrt{\sigma}}$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{4f} &= \frac{M^2}{2\beta^2\sigma\sqrt{\sigma}} \\
\beta_{5f} &= \frac{M^2}{16\beta^2\sigma^{7/2}}[M^2(4\sigma+5)+\sigma] \\
\beta_{6f} &= \frac{M^2}{12\beta^4\sigma^{5/2}}[M^2(2\sigma+3)+\sigma] \\
\beta_{7f} &= -\frac{M^4\lambda}{48\beta^2\sigma^{9/2}}[M^2(4\sigma+7)+3\sigma] \\
\beta_{8f} &= -\frac{M^4}{48\beta^4\sigma^{7/2}}[M^2(2\sigma+5)+3\sigma] \\
\varepsilon_{1f} &= 2 \\
\varepsilon_{2f} &= -\frac{M^2}{12} \\
a_{1\varphi} &= -\frac{\lambda}{\sigma} \\
a_{2\varphi} &= \frac{2M^2\lambda^2}{\sigma^2} \\
a_{3\varphi} &= \frac{M^2\lambda^3}{24\beta\sigma^3}[M^2(28\sigma+45)+9\sigma] \\
a_{4\varphi} &= \frac{M^2\lambda}{24\beta^2\sigma^3}[M^2(14\sigma+15)+2\sigma^2+3\sigma] \\
a_{5\varphi} &= -\frac{M^4\lambda^3}{36\beta^4\sigma^4}[M^2(15\sigma^2+56\sigma+42)+15\sigma^2+18\sigma] \\
a_{6\varphi} &= -\frac{M^4\lambda^3}{36\beta^2\sigma^4}[M^2(22\sigma+42)+3\sigma^2+18\sigma]
\end{aligned}
\tag{4-210}
$$

将(4-206)式的 $\Phi_{\dot{h}}$, Φ_{α}, $\Phi_{\dot{\alpha}}$ 和(4-208)式的 $\Phi_{\dot{f}}$, $\Phi_{\dot{\varphi}}$ 代人(4-204)式，求得总速度势 Φ。根据(4-202)式的压力差公式，则得 y 剖面上的力的表达式(向下为正)：

$$
L = -2b\int_{y/\lambda}^{x_1} \Delta p \, \mathrm{d}x \tag{4-211}
$$

以及剖面力矩的表达式(前缘向上为正)：

$$M_\alpha = -4b^2\int_{y/\lambda}^{x_1}(x-x_0)\Delta p\mathrm{d}x \tag{4-212}$$

以 Φ_h，Φ_v，Φ_α 和 Φ_f，Φ_φ 代入之，于是(4-211)和(4-212)式改写为

$$L = -4\rho bU^2k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\left[\frac{h_0}{b}(L_1+\mathrm{i}L_2)+\alpha_0(L_3+\mathrm{i}L_4)+ f_0(L_5+\mathrm{i}L_6)+\varphi_0(L_7+\mathrm{i}L_8)\right] \tag{4-213}$$

$$M_\alpha = -4\rho b^2U^2k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\left[\frac{h_0}{b}(M_1+\mathrm{i}M_2)+\alpha_0(M_3+\mathrm{i}M_4)+ f_0(M_5+\mathrm{i}M_6)+\varphi_0(M_7+\mathrm{i}M_8)\right] \tag{4-214}$$

式中，$L_1+\mathrm{i}L_2$ 为平移振动产生的合成升力系数。

$L_3+\mathrm{i}L_4$ 为俯仰振动产生的合成升力系数。

$L_5+\mathrm{i}L_6$ 为朴振振动产生的合成升力系数。

$L_7+\mathrm{i}L_8$ 为滚转振动产生的合成升力系数。

$M_1+\mathrm{i}M_2$ 为平移振动产生的合成升力矩系数。

$M_3+\mathrm{i}M_4$ 为俯仰振动产生的合成力矩系数。

$M_5+\mathrm{i}M_6$ 为朴振振动产生的合成力矩系数。

$M_7+\mathrm{i}M_8$ 为滚转振动产生的合成升矩系数。

对于超音速前、后缘情况，上述升力和力矩系数表示为：

$$L_1+\mathrm{i}L_2 = L_1'+\mathrm{i}L_2'$$

$$L_3+\mathrm{i}L_4 = L_3'+\mathrm{i}L_4-\left(\frac{i}{k}+\frac{x_0}{b}\right)(L_1'+\mathrm{i}L_2')$$

$$L_5+\mathrm{i}L_6 = L_5'+\mathrm{i}L_6$$

$$L_7+\mathrm{i}L_8 = L_7'+\mathrm{i}L_8'$$

$$M_1+\mathrm{i}M_2 = M_1'+\mathrm{i}M_2'-\frac{x_0}{b}(L_1'+\mathrm{i}L_2)$$

$$M_3+\mathrm{i}M_4 = M_3'+\mathrm{i}M_4-\frac{x_0}{b}(L_3'+\mathrm{i}L_4')-$$

$$\left(\frac{i}{k}+\frac{x_0}{b}\right)(M_1+\mathrm{i}M_2)$$

$$M_5+\mathrm{i}M_6=M_5{}'+\mathrm{i}M_6{}'-\frac{x_0}{b}(L_3{}'+\mathrm{i}L_4{}')$$

$$M_7+\mathrm{i}M_8=M_7{}'+\mathrm{i}M_8{}'-\frac{x_0}{b}(L_7{}'+\mathrm{i}L_8{}') \tag{4-215}$$

上式中的 $L_1{}',L_2{}',L_3{}',L_4{}'$等系数有下列表达式：

$$L_1{}'=\frac{-1}{2\pi}[(\alpha_1E_{01}+\beta_1H_{01}^0+\beta_2F_{02}^0)+(\alpha_2G_{02}+\alpha_3G_{20}+\alpha_4E_{03}+\alpha_5E_{21}+\beta_3H_{03}^0+\beta_4F_{04}^0)k^2]$$

$$L_2{}'=\frac{-1}{2\pi}[-\beta_1F_{01}^0\frac{1}{k}+(\alpha_1G_{01}-\alpha_2E_{02}-\alpha_3E_{20}+\beta_2H_{02}^0-\beta_3F_{03}^0)k]$$

$$L_3{}'=\frac{-1}{2\pi}[\gamma_1G_{01}+\gamma_2E_{02}+\gamma_3E_{20}+\delta_1H_{11}^0+\delta_2H_{01}^1+\delta_3H_{02}^0+\delta_4F_{12}^0+\delta_5F_{03}^0]$$

$$L_4{}'=\frac{-1}{2\pi}[-(\gamma_1E_{01}+\delta_1F_{11}^0+\delta_2F_{01}{}'+\delta_3F_{02}^0)\frac{1}{k}+(\gamma_2G_{02}+\gamma_3G_{20}-\gamma_4E_{03}-\gamma_5E_{21}+\delta_4H_{12}^0+\delta_5H_{03}^0-\delta_6F_{13}^0-\delta_7F_{03}^1-\delta_8F_{04}^0)k]$$

$$L_5{}'=\frac{-1}{2\pi}[\alpha_{1f}G_{01}+\alpha_{2f}E_{02}+\alpha_{3f}E_{20}+\epsilon_{1f}S_{20}+\beta_{1f}H_{02}^0+\beta_{2f}H_{01}^1+\beta_{3f}F_{03}^0+\beta_{4f}F_{02}^1+k^2(\alpha_{4f}G_{03}+\alpha_{5f}G_{21}+\alpha_{6f}E_{04}+\alpha_{7f}E_{22}+\alpha_{8f}E_{40}+\epsilon_{2f}S_{40}+\beta_{5f}H_{04}^0+\beta_{6f}H_{03}^1+\beta_{7f}F_{05}^0+\beta_{8f}F_{04}^1)]$$

$$L_6{}'=\frac{-1}{2\pi}[\frac{1}{k}(-\alpha_{1f}E_{01}-\epsilon_{1f}J_{20}-\beta_{1f}F_{02}^0-\beta_{2f}F_{01}^1)+k(\alpha_{2f}G_{02}+\alpha_{3f}G_{20}-\alpha_{4f}E_{01}-\alpha_{5f}E_{21}-\epsilon_{2f}J_{40}+\beta_{3f}H_{03}^0+\beta_{4f}H_{02}^1-\beta_{5f}F_{04}^0-\beta_{6f}F_{03}^1)]$$

$$L_7{}'=\frac{-1}{2\pi}[a_{1\varphi}G_{10}+a_{2\varphi}E_{11}-\beta_{1f}H_{02}^0-\beta_{2f}H_{01}^1-\beta_{3f}F_{03}^0-$$

$$\beta_{4f}F_{02}^{1} + k^2(a_{3\varphi}G_{12} + a_{4\varphi}G_{30} + a_{5\varphi}E_{13} +$$

$$a_{6\varphi}E_{31} - \beta_{5f}H_{04}^{0} - \beta_{6f}H_{03}^{1} - \beta_{7f}F_{05}^{0} - \beta_{8f}F_{04}^{1})]$$

$$L_8{}' = \frac{-1}{2\pi}[\frac{1}{k}(a_{1\varphi}E_{10} + \beta_{1f}F_{02}^{0} + \beta_{2f}F_{01}^{1}) + k(a_{2\varphi}G_{11} - a_{3\varphi}E_{12} -$$

$$a_{4\varphi}E_{30} - \beta_{3f}H_{03}^{0} - \beta_{4f}H_{02}^{1} + \beta_{5f}F_{04}^{0} + \beta_{6f}F_{03}^{1})]$$

$$M_1{}' = \frac{-1}{2\pi}\{[\alpha_1(E_{02} - G_{01}) + \beta_1 H_{11}^{0} + \beta_2(F_{12}^{0} - H_{02}^{0})] +$$

$$k^2[\alpha_2 G_{03} + \alpha_3 G_{21} + \alpha_4(E_{04} - G_{03}) + \alpha_5(E_{22} - G_{21}) +$$

$$\beta_3 H_{13}^{0} + \beta_4(F_{14}^{0} - H_{04}^{0})]\}$$

$$M_2{}' = \frac{-1}{2\pi}\{\beta_1(H_{01}^{0} - F_{11}^{0})\frac{1}{k} + k[\alpha_1 G_{02} + \alpha_2(G_{02} - E_{03}) +$$

$$\alpha_3(G_{20} - E_{21}) + \beta_2 H_{12}^{0} + \beta_3(H_{03}^{1} - F_{13}^{0})]\}$$

$$M_3{}' = \frac{-1}{2\pi}[\gamma_1 G_{02} + \gamma_2(E_{03} - G_{02}) + \gamma_3(E_{21} - G_{20}) + \delta_1 H_{21}^{0} +$$

$$\delta_2 H_{11}^{1} + \delta_3 H_{12}^{0} + \delta_4(F_{22}^{0} - H_{12}^{0}) + \delta_5(F_{13}^{0} - H_{03}^{0})]$$

$$M_4{}' = \frac{-1}{2\pi}\{\frac{1}{k}[\gamma_1(G_{01} - E_{02}) + \delta_1(H_{11}^{0} - F_{21}^{0}) + \delta_2(H_{01}^{1} - F_{11}^{1}) +$$

$$\delta_3(H_{02}^{0} - F_{12}^{0})] + k[\gamma_2 G_{03} + \gamma_3 G_{21} + \gamma_4(G_{03} - E_{04}) +$$

$$\gamma_5(G_{21} - E_{22}) + \delta_4 H_{22}^{0} + \delta_5 H_{13}^{0} + \delta_6(H_{13}^{0} - F_{23}^{0}) +$$

$$\delta_7(H_{03}^{1} - F_{13}^{1}) + \delta_8(H_{04}^{0} - F_{14}^{0})]\}$$

$$M_5{}' = \frac{-1}{2\pi}\{\alpha_{1f}G_{02} + \alpha_{2f}(E_{03} - G_{02}) + \alpha_{3f}(E_{21} - G_{20}) +$$

$$\varepsilon_{1f}S_{21} + \beta_{1f}H_{12}^{0} + \beta_{2f}H_{11}^{1} + \beta_{3f}(F_{13}^{0} - H_{03}^{0}) +$$

$$\beta_{4f}(F_{12}^{1} - H_{02}^{1}) + k^2[\alpha_{4f}G_{04} + \alpha_{5f}G_{22} + \alpha_{6f}(E_{05} - G_{04}) +$$

$$\alpha_{7f}(E_{23} - G_{22}) + \alpha_{8f}(E_{41} - G_{40}) + \varepsilon_{2f}S_{41} +$$

$$\beta_{5f}H_{14}^{0} + \beta_{6f}H_{13}^{1} + \beta_{7f}(F_{15}^{0} - H_{05}^{0}) + \beta_{8f}(F_{14}^{1} - H_{04}^{1})]\}$$

$$M_6{}' = \frac{-1}{2\pi}\{\frac{1}{k}[\alpha_{1f}(G_{01} - E_{02}) + \varepsilon_{1f}(S_{20} - J_{21}) + \beta_{1f}(H_{02}^{0} - F_{12}^{0}) +$$

$$\beta_{2f}(H_{01}^{1} - F_{11}^{1})] + k[\alpha_{2f}G_{03} + \alpha_{3f}G_{21} + \alpha_{4f}(G_{03} - E_{04}) +$$

$$\alpha_{5f}(G_{21} - E_{22}) + \varepsilon_{2f}(S_{40} - J_{41}) + \beta_{3f}H_{12}^{0} + \beta_{4f}H_{12}^{1} +$$

$$\beta_{5f}(H_{04}^{0}-F_{14}^{0})+\beta_{6f}(H_{03}^{1}+F_{13}^{1})]\}$$

$$M_7{}'=\frac{-1}{2\pi}\{a_{1\varphi}G_{11}+a_{2\varphi}(E_{12}-G_{11})-\beta_{1f}H_{12}^{0}-\beta_{2f}H_{11}^{1}-$$
$$\beta_{3f}(F_{13}^{0}-H_{03}^{0})-\beta_{4f}(F_{12}^{1}-H_{02}^{1})+k^2[a_{3\varphi}G_{13}+$$
$$a_{4\varphi}G_{31}+a_{5\varphi}(E_{14}-G_{13})+a_{6\varphi}(E_{32}-G_{31})-\beta_{5f}H_{14}^{0}-$$
$$\beta_{6f}H_{13}^{1}-\beta_{7f}(F_{15}^{0}-H_{05}^{0})-\beta_{8f}(F_{14}^{1}-H_{04}^{1})]\}$$

$$M_8{}'=\frac{-1}{2\pi}\{\frac{1}{k}[a_{1\varphi}(G_{10}-E_{11})+\beta_{1f}(F_{12}^{0}-H_{02}^{0})+$$
$$\beta_{2f}(F_{11}^{1}-H_{01}^{1})]+k[a_{2\varphi}G_{12}+a_{3\varphi}(G_{12}-E_{13})+$$
$$a_{4\varphi}(G_{30}-E_{31})-\beta_{3f}H_{13}^{0}-\beta_{4f}H_{12}^{1}+$$
$$\beta_{5f}(F_{14}^{0}-H_{04}^{0})+\beta_{6f}(F_{13}^{1}-H_{03}^{1})]\}\qquad(4\text{-}216)$$

式中 $a_{1f},\cdots a_{8f},\beta_{1f},\cdots\beta_{8f},\epsilon_{1f},\epsilon_{2f},a_{1\varphi},\cdots a_{6\varphi}$等列于(4-210)式。此外，

$$\alpha_1=\frac{M^2\lambda}{\beta^2\sigma}$$

$$\alpha_2=\frac{M^2\lambda}{6\beta^4\sigma^2}[M^2(4\sigma+3)+\sigma]$$

$$\alpha_3=\frac{M^2\lambda}{6\beta^2\sigma^2}(3M^2+\sigma)$$

$$\alpha_4=-\frac{M^4}{72\beta^6\sigma^3}[M^2(18\sigma^2+31\sigma+15)+3\sigma(5\sigma+3)]$$

$$\alpha_5=-\frac{M^4\lambda}{72\beta^4\sigma^3}[M^2(38\sigma+45)+3\sigma(4\sigma+9)]$$

$$\beta_1=\frac{1}{\sigma^{1/2}}$$

$$\beta_2=-\frac{M^2\lambda}{2\sigma^{3/2}}$$

$$\beta_3=-\frac{M^2}{12\beta^2\sigma^{5/2}}[M^2(2\sigma+3)+\sigma]$$

$$\beta_4=\frac{M^4\lambda}{48\beta^2\sigma^{7/2}}[M^2(2\sigma+5)+3\sigma]$$

$$\gamma_1 = \frac{\lambda}{\sigma}$$

$$\gamma_2 = -\frac{M^2\lambda}{3\beta^2\sigma^2}(\sigma + 3)$$

$$\gamma_3 = -\frac{M^2\lambda}{\sigma^2}$$

$$\gamma_4 = -\frac{M^2\lambda}{24\beta^4\sigma^3}[M^2(2\sigma^2 + 19\sigma + 15) + \sigma(\sigma + 3)]$$

$$\gamma_5 = -\frac{M^2\lambda}{24\beta^2\sigma^3}[M^2(26\sigma + 45) + 9\sigma]$$

$$\delta_1 = -\frac{1}{\sigma^{3/2}}$$

$$\delta_2 = \delta_1$$

$$\delta_3 = \frac{\beta^2\lambda}{2\sigma^{3/2}}$$

$$\delta_4 = -\frac{M^2\lambda}{2\sigma^{3/2}}$$

$$\delta_5 = \frac{M^2}{6\sigma^{3/2}}(2\sigma + 3)$$

$$\delta_6 = \frac{M^2}{48\beta^2\sigma^{7/2}}[4M^2(4\sigma + 5) - \sigma(\sigma - 3)]$$

$$\delta_7 = \frac{M^2}{48\beta^2\sigma^{7/2}}[4M^2(2\sigma + 5) + 3\sigma]$$

$$\delta_8 = -\frac{M^4\lambda}{48\sigma^{7/2}}(2\sigma + 5) \tag{4-217}$$

$$E_{mn} = 2^{m+n+1} y^m x_1^n \sqrt{x_1^2 - \beta^2 y^2}$$

$$F_{mn}^e = 2^{e+m+n}\Big[(\beta^2\lambda y)^e x_1^m (\lambda x_1 + y)^n \cos^{-1}\frac{x_1 + \beta^2\lambda y}{\beta(\lambda x_1 + y)} +$$

$$(-\beta^2\lambda y)^e x_1^m (\lambda x_1 - y)^n \cos^{-1}\frac{x_1 - \beta^2\lambda y}{\beta(\lambda x_1 - y)}\Big]$$

$$G_{mn} = 2^{m+n-2} y^m \int_{y/\lambda}^{x_1} x^n \sqrt{x^2 - \beta^2 y^2}\,\mathrm{d}x$$

$$H_{mn}^{e} = 2^{e+m-n+1}\left[(\beta^2\lambda y)^e\int_{y/\lambda}^{x_1} x^m(\lambda x + y)^n \cos^{-1}\frac{x+\beta^2\lambda y}{\beta(\lambda x + y)}\mathrm{d}x + \right.$$

$$\left.(-\beta^2\lambda y)^e\int_{y/\lambda}^{x_1} x^m(\lambda x - y)\cos^{-1}\frac{x-\beta^2\lambda y}{\beta(\lambda x - y)}\mathrm{d}x\right]$$

$$J_{mn} = 2^{m+n} y^m x_1^n \tanh^{-1}\sqrt{\frac{x_1 - \beta|y|}{x_1 - \beta|y|}}$$

$$S_{mn} = 2^{m-n+1}\int_{y/\lambda}^{x_1} y^m x^n \tanh^{-1}\sqrt{\frac{x-\beta|y|}{x+\beta|y|}}\mathrm{d}x \qquad (4\text{-}218)$$

其中 x_1 是翼面后缘的 x 坐标，y/λ 是翼面前缘的 x 坐标。

在文献[28]、[29]中，给出了 $G_{01}, G_{02}, G_{03}, \cdots H_{01}^0, H_{02}^0, \cdots$ 等公式。值得指出的是，这些公式有若干处存在印刷和推导错误，因此，引用时应特别小心。

总升力和力矩系数（文献[30]）与剖面升力和力矩系数有着相似的表达式，以$\overline{L_i}$，$\overline{M_i}$表示之。同样地，在符号 $E_{mn}, F_{mn}^e, G_{mn}, H_{mn}\cdots$ 上加一横标表示$\overline{L_i}$，$\overline{M_i}$中的系数，而 $\alpha_i, \alpha_{if}, \beta_i, \beta_{if}\cdots$ 是相同的。

由剖面气动力沿展向积分，便得到翼面上的总气动力，即：

$$\left.\begin{aligned}
\overline{L} &= \int_{\text{翼展}} 2bL\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{y_t} 2bL\,\mathrm{d}y \\
&= -8\rho b^2U^2k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\Big[\frac{h_0}{b}(\overline{L_1} + \mathrm{i}\,\overline{L_2}) + \alpha_0(\overline{L_3} + \mathrm{i}\,\overline{L_4}) + \\
&\quad f_0(\overline{L_5} + \mathrm{i}\,\overline{L_6}) + \varphi_0(\overline{L_7} + \mathrm{i}\,\overline{L_8})\Big] \\
\overline{M_a} &= \int_{\text{翼展}} 2bM_a\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{y_t} 2bM_a\,\mathrm{d}y \\
&= -8\rho b^3U^2k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\Big[\frac{h_0}{b}(\overline{M_1} + \mathrm{i}\,\overline{M_2}) + \alpha_0(\overline{M_3} + \mathrm{i}\,\overline{M_4}) + \\
&\quad f_0(\overline{M_5} + \mathrm{i}\,\overline{M_6}) + \varphi_0(\overline{M_7} + \mathrm{i}\,\overline{M_8})\Big]
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}219)$$

式中，y_t 为翼尖的 y 坐标，$y_t = \dfrac{\lambda}{1-\lambda D}$，其中 $D = \mathrm{tg}\Lambda_{T.E}$，$\Lambda_{T.E}$ 为后缘

的后掠角(以向后为正)。

关于 $\overline{L}_1+\overline{L}_2,\overline{L}_3+\mathrm{i}\,\overline{L}_4,\cdots,\overline{M}_1+\mathrm{i}\,\overline{M}_2,\overline{M}_3+\mathrm{i}\,\overline{M}_4,\cdots$ 的表达式,这里就不一一列举了,读者可参阅文献[28],[29]和[30]。

我们将两个三角翼的升力和力矩系数沿展向的分布用图 4-20 表示。

§7. 准定常二次理论

在小扰动的假设下,略去扰动速度三阶以上的微量,得到速度势满足的二次方程式(文献[25]):

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\beta^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2\frac{M^2}{U}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial t}-\frac{M^2}{U^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$
$$=M^2[(\gamma-1)(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{1}{U}\frac{\partial\Phi}{\partial t})+2\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+$$
$$2\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}+\frac{2}{U}(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial t})] \tag{4-220}$$

式中 $\beta=\sqrt{M^2-1}$。γ 为比热比,对于空气 $\gamma=1.4$。

若把扰动速度势写为:

$$\Phi(x,z,t)=\varphi(x,z)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\overline{K}x)}\Psi(x,z) \tag{4-221}$$

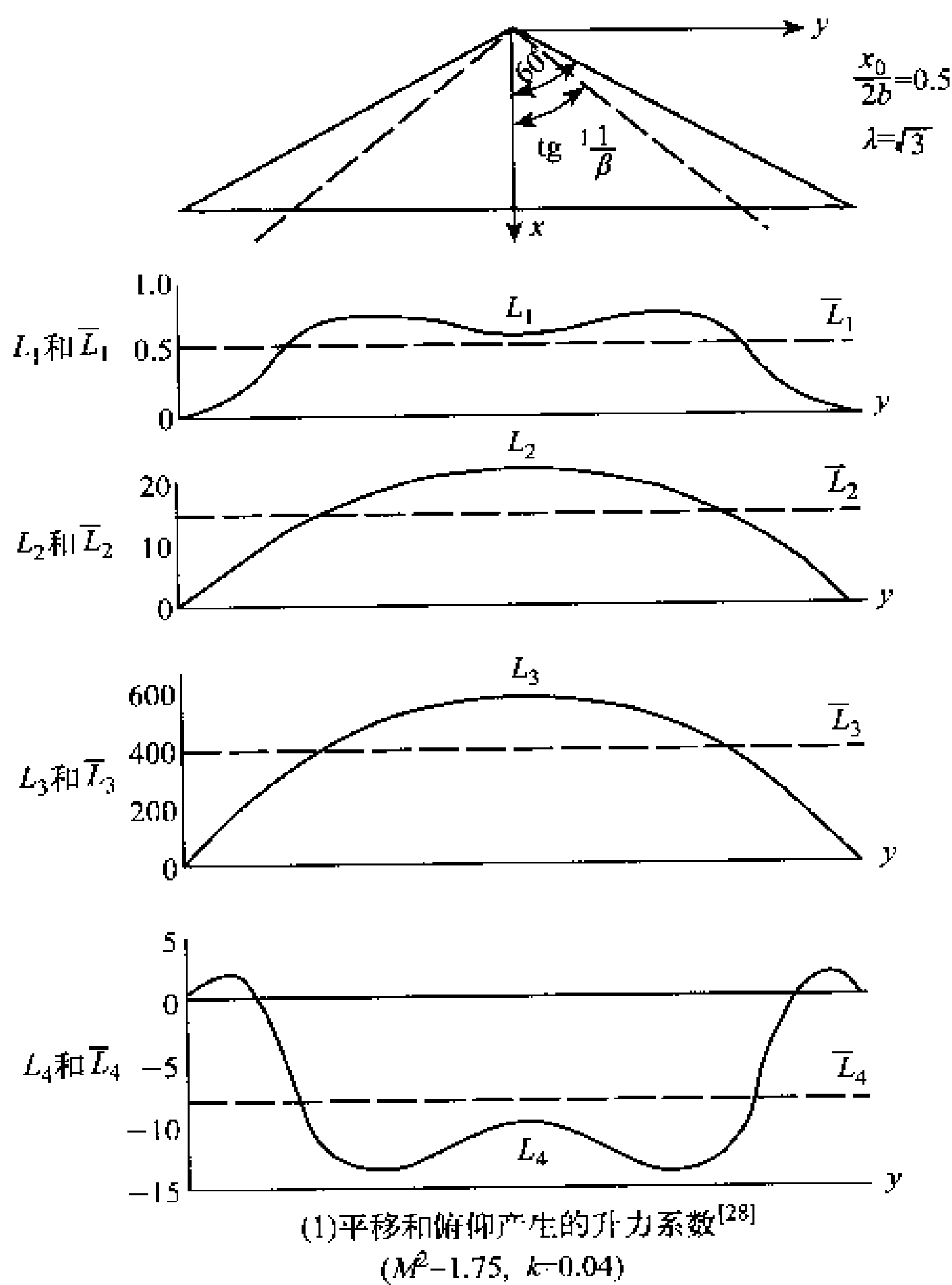
式中 $\overline{K}=\frac{M^2}{\beta^2}\frac{\omega}{U}$。$\varphi$ 对应于平均定常流,Ψ 项对应于振动引起的附加流动。

将(4-221)式代入(4-220)式,对于 φ,有

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\beta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=M^2\{(\gamma-1)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta\varphi+[(\frac{\partial\varphi}{\partial x})^2+(\frac{\partial\varphi}{\partial z})^2]_x\} \tag{4-222}$$

其中 Δ 为拉普拉斯算子,$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$。

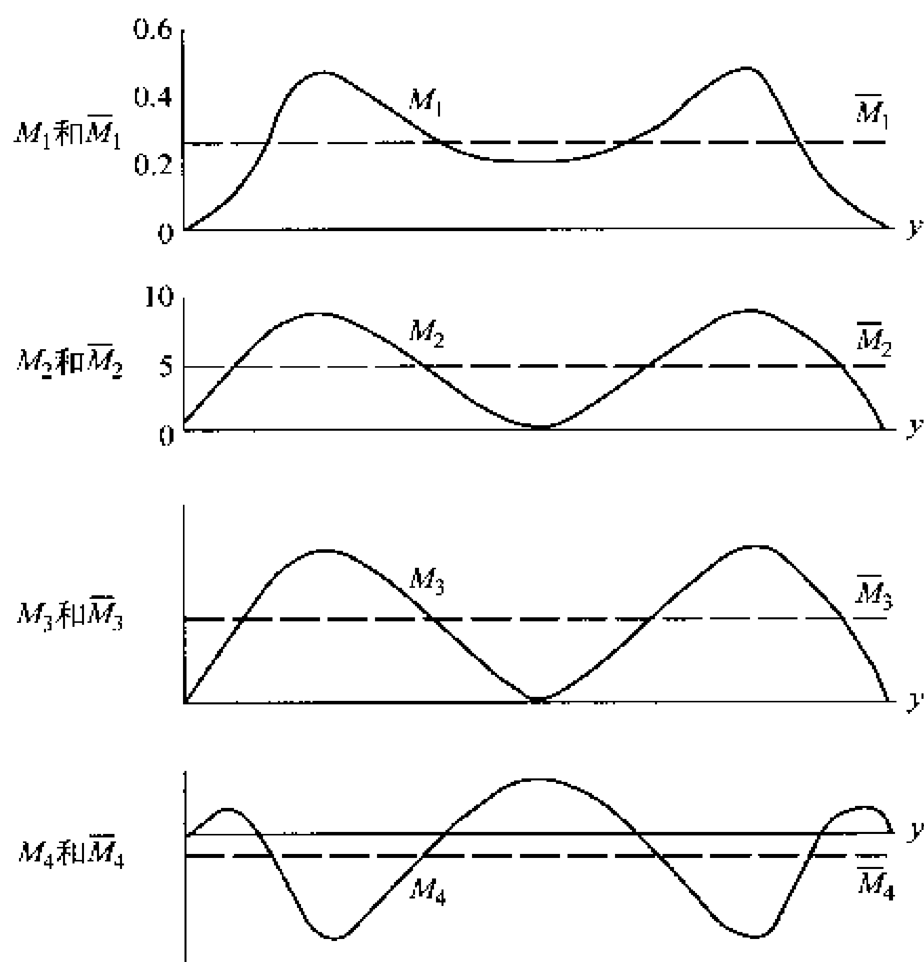
对于 ψ,则有



(1)平移和俯仰产生的升力系数[28]
(M^2=1.75, k=0.04)

图 4-20 三角翼的升力和力矩系数沿展向的分布

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \left(\frac{\beta \bar{K}}{M}\right)^2 \psi = M^2 \Big[(\gamma - 1)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Delta\psi + \frac{\partial \psi}{\partial x}\Delta\varphi\right) +$$



(2)平移和俯仰产生的力矩系数[28]

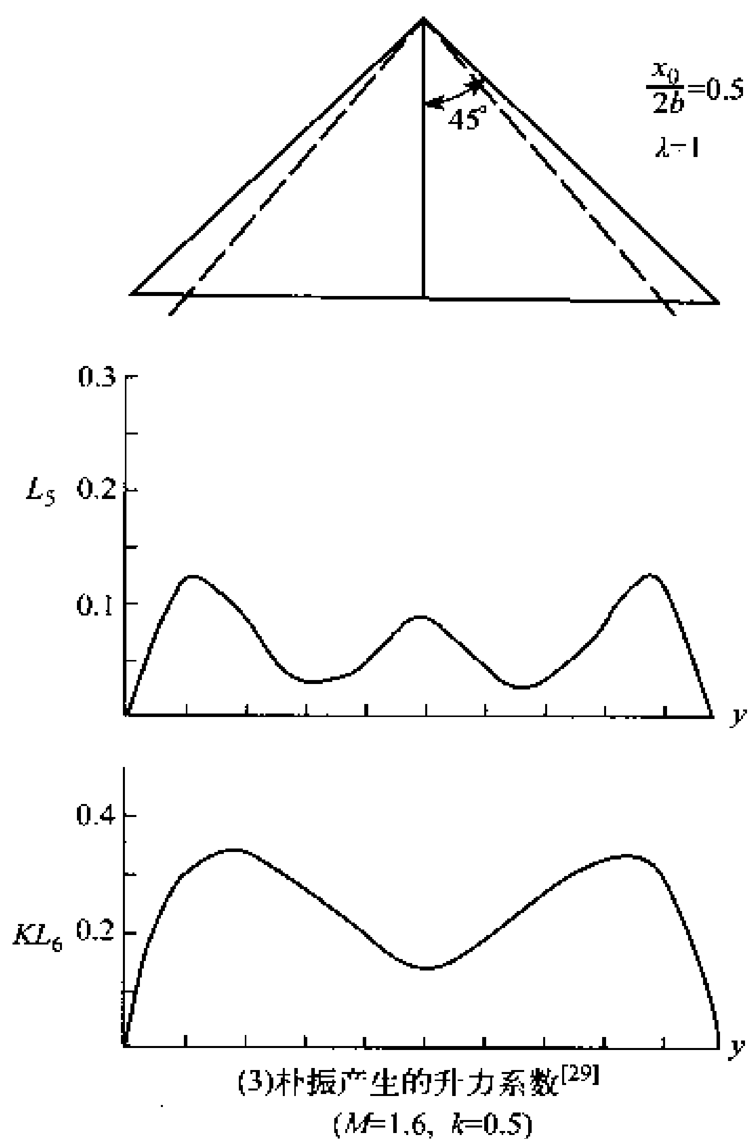
图 4-20 （续）

$$2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_x\Big]-\mathrm{i}\overline{K}M^2\Big[(\gamma-1)\left(2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{1}{M^2}\psi\Delta\varphi\right)-$$

$$2\left(\frac{M^2+1}{M^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\psi+\frac{1}{M^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\Big]-$$

$$\overline{K}^2[2+(\gamma-1)M^2]\frac{\partial\varphi}{\partial x}\psi \qquad (4\text{-}223)$$

略去(4-222)和(4-223)式的右边，则



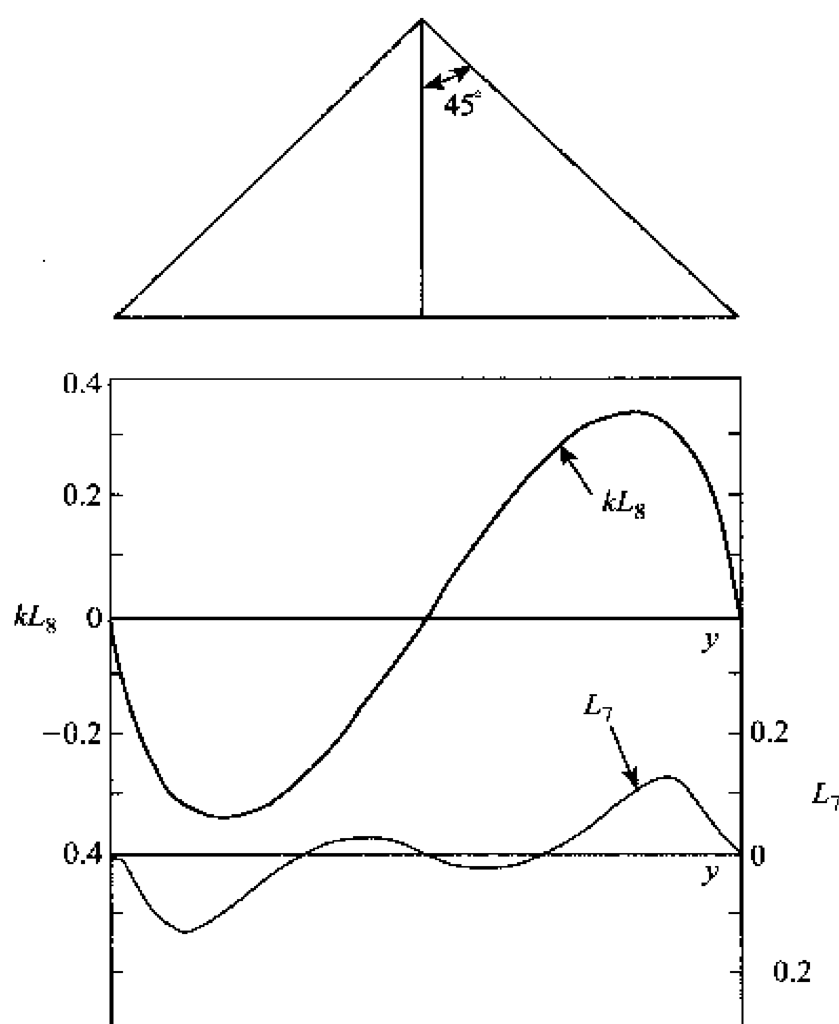
(3)朴振产生的升力系数[29]
(M=1.6, k=0.5)

图 4-20 (续)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \tag{4-224}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \left(\frac{\beta \overline{K}}{M}\right)^2 \psi = 0 \tag{4-225}$$

(4-224)式就是熟知的定常流线性方程式，它的解是已知的。(4-225)式的解有如下形式：



(4) 滚转产生的升力系数[29]

图 4-20 (续)

$$\psi(x,z)=\frac{1}{\beta}\int_0^{x-\beta z}J_0\left(\frac{\overline{K}}{M}\sqrt{\xi^2-\beta^2z^2}\right)W(x-\xi)\mathrm{d}\xi \quad (4\text{-}226)$$

其中 J_0 为零阶的贝塞尔函数，$W(x-\xi)$ 为下洗速度。

将 φ,ψ 的一次解代入(4-222)和(4-223)式的右边，则得二次迭代方程式：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\beta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=2M^2\left[\beta^2(N-1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]_x \quad (4\text{-}227)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \left(\frac{\beta \overline{K}}{M}\right)^2 \Psi = 2M^2 [\beta^2 (N-1) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} +$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z}]_x - 2ik[\beta^2 (2N-1) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \beta^2 N \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Psi +$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z}] - 2N\left(\frac{\beta \overline{K}}{M}\right)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Psi \tag{4-228}$$

式中

$$N = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M^2}{\beta^2}。$$

定常流的解是已知的。对于振动引起的附加部分的解，按频率参数 $\overline{K}$ 展开，仅保留其线性项，则

$$\Psi(x,z) = \frac{1}{\beta} \int_0^{x - \beta z} w(\xi) \mathrm{d}\xi + 0(K^2) \tag{4-229}$$

在(4-228)式中不包含 N 以外的各项，可以找到一个特殊积分

$$\Psi^* = M^2 (\varphi)_x - i\overline{K} \varphi \Psi \tag{4-230}$$

此时，(4-228)式简化为：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \left(\frac{\beta \overline{K}}{M}\right)^2 \psi = 2\beta^2 N \{M^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_x -$$

$$i\overline{K}[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_x] - \frac{K^2}{M^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Psi\} \tag{4-231}$$

速度势 Ψ 的完全解等于(4-231)式的解加上(4 230)的特殊积分。

设翼剖面绕 $x=b$ 点以频率 ω 作俯仰振动(图 4-21)，其振幅为 α，瞬时的俯仰角 $\alpha=\alpha_0 e^{i\omega t}$。当俯仰角为零时，翼剖面的坐标表示为：

$$z = z(x) = \varepsilon f(x) \tag{4-232}$$

其中 ε 为翼型厚度的小参数，$f(x)$ 为翼型上表面的函数。

振动翼面的上表面位置表示为：

$$z = \varepsilon f(x) - \alpha_0 e^{i\omega t} (x - b) \tag{4-233}$$

二次压力系数公式

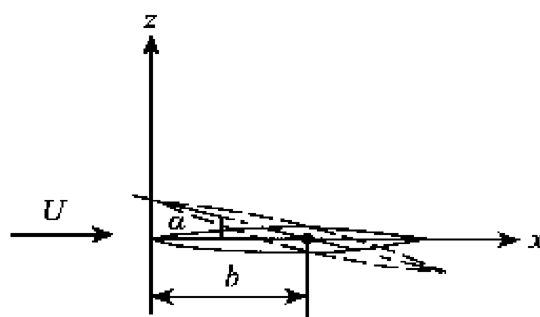


图 4-21 翼剖面绕 $x=b$ 点的俯仰

$$C_p = -2\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{2}{U}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \beta^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 + \frac{2M^2}{U}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + M^2\left(\frac{1}{U}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 \tag{4-234}$$

考虑翼型表面上的边界条件，在 $z=0$ 处，将上式展开为台劳级数，并保留厚度的二次项和攻角的一次项，则得翼型上表面的压力系数：

$$c_{p_u} = \left[-2\frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2\varepsilon\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}f + \beta^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] + 2\alpha_0 e^{i(\omega t - \bar{K}x)}\left[\frac{iK}{M^2}\psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} + \varepsilon\left(\frac{iK}{M^2}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}\right)f + \beta^2\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} + e^{iKx}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}(x-b)\right] \tag{4-235}$$

将速度势代入，取压力系数的实部。对于缓慢振动的翼型，其上表面的压力系数(取厚度的二次项，攻角的一次项)为：

$$C_{p_u} = C_{p_0} - \frac{2}{\beta}\alpha + \frac{2}{\beta}\left(\frac{2-M^2}{\beta^2}x + b\right)\frac{\dot{\alpha}}{U} - \frac{2M^2N-2}{\beta^2}z'\alpha + 2\left[\frac{2M^2(N-1)}{\beta^4}z + \frac{(2-M^2)(M^2N-1)}{\beta^4}xz' + \frac{M^2N-2}{\beta^2}bz'\right]\frac{\dot{\alpha}}{U} \tag{4-236}$$

其中 C_{p_0} 为定常压力系数。

根据布斯曼(Busemann)的二次理论

$$c_{p_0}=\frac{2}{\beta}z'+\frac{M^2N-2}{\beta^2}z'^2 \tag{4-237}$$

由于(4-236)式的压力系数公式较复杂,在实际上,对于缓慢的振动翼面,某点的压力以攻角等于该点当地瞬时攻角的定常运动翼面的压力,这就是我们要介绍的准定常二次理论。

此时,把定常压力系数公式(4-237)变换为:

$$\begin{aligned}p_u-p_\infty&=\frac{1}{2}\rho U^2\left[\frac{2}{\beta}z'+\frac{M^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\frac{M^2}{\beta^2}\right)-2}{\beta^2}z'^2\right]\\&=\rho\left(\frac{U}{M}\right)^2\left(\frac{M}{\beta}\right)\left[Mz'+\frac{M^4(\gamma+1)-4\beta^2}{4\beta^3M}(Mz')^2\right]\end{aligned} \tag{4-238}$$

注意到 $w=Uz'$,其中 w 为下洗速度。则

$$p_u-p_\infty=\rho a^2\left(\frac{M}{\beta}\right)\left[\frac{w}{a}+\frac{M^4(\gamma+1)-4\beta^2}{4\beta^3M}\left(\frac{w}{a}\right)^2\right] \tag{4-239}$$

下洗速度 w 由两部分(即翼面位移和翼型厚度)组成的。对于上翼面,

$$w=\left(U\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)H(x,y,t)+U\frac{\partial\tau(x,y)}{\partial x} \tag{4-240}$$

对于下翼面,

$$w=-\left(U\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)H(x,y,t)+U\frac{\partial\tau(x,y)}{\partial x} \tag{4-241}$$

其中 a 为音速,$H(x,y,t)$ 为翼面的位移,$\tau(x,y)$ 为翼型厚度。

将(4-240)和(4-241)式代入(4-239)式,则作用在翼面上的压力差等于上翼面的压力减去下翼面的压力。

$$\begin{aligned}\Delta P(x,y,t)&=p_U-p_L\\&=2\rho a\frac{M}{\beta}\left[1+\bar{G}\frac{\partial}{\partial x}\tau(x,y)\right]\left[\left(U\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)H(x,y,t)\right]\end{aligned} \tag{4-242}$$

式中 $G=\frac{M^4(\gamma+1)-4\beta^2}{2\beta^3}$。$M$ 为马赫数，$\beta=\sqrt{M^2-1}$。γ 为比热比，对于空气 $\gamma=1.4$。

§8. 活塞理论

当飞机或导弹以高超音速飞行时，由于气流的马赫角很小，翼面产生的扰动近似地沿法向传播，翼面上各点之间的相互影响甚小。如果我们略去这种影响，则可以假定翼面上的压力和下洗之间构成了点函数的关系式，即翼面上的当地压力与来流方向垂直的当地流速成比例，该关系式可与一元管道内作用在活塞上的压力和活塞移动速度成比例相比拟(图 4-22)。

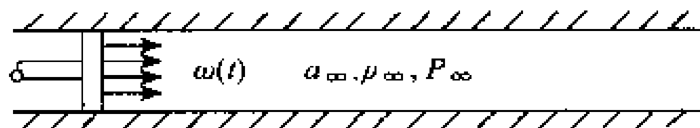


图 4-22 活塞运动图

设管道内充满理想气体，活塞在管道的末端以速度 $w(t)$ 移动着，气体的未扰动的压力、密度和音速分别为 P_∞、ρ_∞ 和 a_∞。如果活塞的移动速度 $w(t)\ll a_\infty$，则活塞产生的扰动是微小的，只产生简单波，且没有熵的变化。管道内的气体运动时应满足运动方程式、连续方程式和绝热条件(即(4-1)、(4-4)和(4-6)式)：

$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \tag{4-243}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \tag{4-244}$$

以及

$$\frac{P}{\rho^\gamma}=\frac{P_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \tag{4-245}$$

把(4-243)和(4-244)式改写为

$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \rho}\frac{d\rho}{dw}\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{4-243'}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{4-244'}$$

求$\frac{\partial w}{\partial t}$和$\frac{\partial w}{\partial z}$的非零解,得到

$$\frac{d\rho}{dw}=\frac{\rho}{a}$$

利用(4-245)式

$$a=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}=\sqrt{\frac{\gamma P_{\infty}}{\rho_{\infty}}}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

于是

$$dw=\sqrt{\frac{\gamma P_{\infty}}{\rho_{\infty}^{\gamma}}}\rho^{\frac{\gamma-3}{2}}d\rho \tag{4-246}$$

对(4-246)式的两边进行积分

$$w=\frac{2}{\gamma-1}\sqrt{\frac{\gamma P_{\infty}}{\rho_{\infty}}}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}+c \tag{4-247}$$

即

$$w=\frac{2}{\gamma-1}a+c$$

当$U=0$时,$a=a_{\infty}$,$c=-\frac{2}{\gamma-1}a_{\infty}$。则

$$w=\frac{2}{\gamma-1}(a-a_{\infty}) \tag{4-248}$$

此外,$a=a_{\infty}(\frac{P}{P_{\infty}})^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$

得到

$$w=\frac{2a_{\infty}}{\gamma-1}[(\frac{P}{P_{\infty}})^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}-1] \tag{4-249}$$

由(4-249)式

$$\frac{P}{P_{\infty}} = (1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{w}{a_{\infty}})^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \tag{4-250}$$

这就是作用在活塞面上的瞬时压力的精确表达式。

由于 $w \ll a_{\infty}$，(4-250)式对$\frac{w}{a_{\infty}}$进行展开，得到线性近似式：

$$P - P_{\infty} = \rho_{\infty} a_{\infty} w \tag{4-251}$$

二次展开式：

$$P - P_{\infty} = \rho_{\infty} a_{\infty}^{2} [c_1 (\frac{w}{a_{\infty}}) + c_2 (\frac{w}{a_{\infty}})^2] \tag{4-252}$$

三次展开式：

$$P - P_{\infty} = \rho_{\infty} a_{\infty}^{2} [c_1 (\frac{w}{a_{\infty}}) + c_2 (\frac{w}{a_{\infty}})^2 + c_3 (\frac{w}{a_{\infty}})^3] \tag{4-253}$$

式中

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = \frac{\gamma+1}{4}$$

$$c_3 = \frac{\gamma+1}{12}$$

这三个系数与(4-184)式相同。

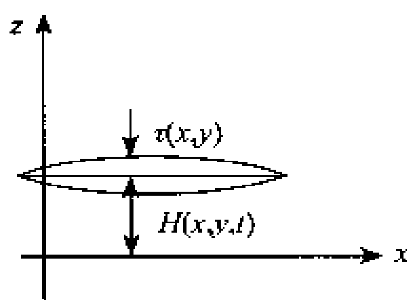


图 4-23　对称翼型的位移

对于超音速飞机和导弹，翼面通常采用对称翼型，翼型厚度函数

用 $\tau(x,y)$ 表示，$H(x,y,t)$ 表示翼中面的位移值（图 4-23）。对于上翼面，位移表示为 $H(x,y,t)+\tau(x,y)$；对于下翼面，位移为 $H(x,y,t)-\tau(x,y)$。

同样地，下洗速度包括翼面位移和翼型厚度两部分，即

对于上翼面

$$w=(U\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t})H(x,y,t)+U\frac{\partial\tau(x,y)}{\partial x} \tag{4-240}$$

对于下翼面

$$w=-(U\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t})H(x,y,t)+U\frac{\partial\tau(x,y)}{\partial x} \tag{4-241}$$

将上、下翼面的下洗速度分别代入（4-251）、（4-252）和（4-253）式，便可求得上下翼面压力差的一次式、二次式、三次式等。通常，我们采用二次活塞理论，其压力差公式表示为：

$$\Delta P(x,y,t)=-2\rho a[1+G\frac{\partial}{\partial x}\tau(x,y)][U\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}]H(x,y,t) \tag{4-254}$$

式中 $G=\frac{\gamma+1}{2}$。为了简洁起见，将 ρ,a 的下标（∞）去掉了。

人们认为活塞理论是高超音速飞行器颤振分析的一个有力的气动力工具，一方面用起来很简单，另一方面能给出合乎工程要求的结果。

按（4-254）式计算的平移和俯仰振动时的升力和力矩，与线性的二元振动气动力理论作比较，在下列范围内：

$M>3$，不限定减缩频率 k 的大小；

$1<M<3$ 以及 $k>3-M$。

二者的一致性是很好的。

按照文献[31]的分析，如果满足下列的任一条件：$M^2\gg1$，$Mk\gg1$ 或者 $k^2\gg1$，则活塞理论是可用的。可以看出，若减缩频率是低的，则马赫数必须是高的；然而，如果减缩频率是高的，则马赫数无需是

高的，甚至可推广到跨音速或者亚音速。

关于活塞理论的马赫数上限，试验曾一直进行到 $M=6.86$。若可略去与非定常流有关的熵变化，活塞理论的基本逻辑是有效的。国外有人提出活塞理论有效的可能上限大约是马赫数 15。

我们认为：活塞理论在低频情况下，马赫数的最有效的应用范围为 $2.5\leqslant M\leqslant 7$。当马赫数更高时，宜采用牛顿流理论。

§9. 细长机翼理论

该理论的基本思想是：当机翼很细长，即 $\frac{l}{b_0}\ll 1$ 时，绕细长薄翼的流动视为垂直于气流方向的横向平面内的二元流动，弦向坐标只作为一个参数出现在边值问题中。此时，速度势所满足的方程式简化为二元拉普拉斯方程式[32]：

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0 \tag{4-255}$$

引入无因次坐标(图 4-24)：

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{y}{s(x)} \\ \eta &= \frac{z}{s(x)} \\ \tau &= \frac{t}{s(x)} \end{aligned}\right\} \tag{4-256}$$

则速度势 Φ 可写作

$$\Phi(x,y,z,t)=s(x)\Psi(\xi,\eta,\tau,x) \tag{4-257}$$

(4-255)式及其相应的边界条件改写为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}=0 \tag{4-258}$$

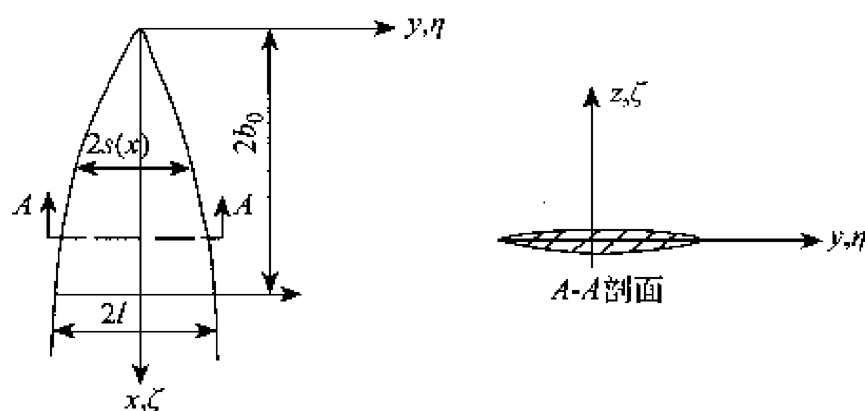


图 4-24　细长机翼的坐标系

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0} = -\overline{W}(|\xi|<1)\\
&\psi\,|_{\eta=0} = 0 \quad (|\xi|>1)
\end{aligned}\right\} \tag{4-259}
$$

式中，W 为无因次下洗。

利用儒可夫斯基变换

$$
\zeta = \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_1^{1}) \tag{4-260}
$$

将复平面 ζ 内的狭条 $\eta=\pm 0, |\xi|<1$ 映射到 ζ_1 平面内的单位圆(图 4-25)。

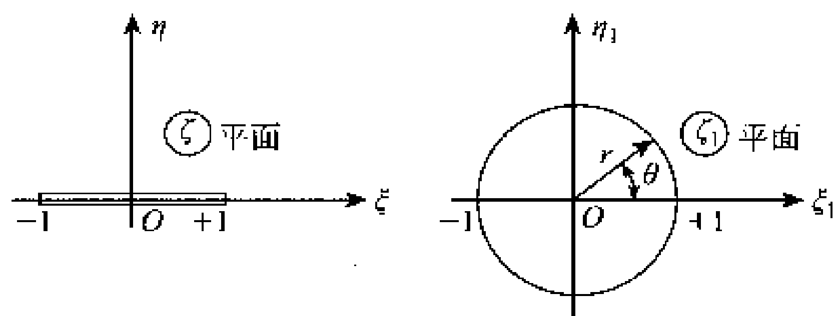


图 4-25　ζ 与 ζ_1 平面的对应关系

引入极坐标

$$\zeta = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{4-261}$$

边界条件有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \psi}{\partial r}\Big|_{r=1} = -\overline{W}\sin\theta \quad (0 < \theta < \pi) \\ &\psi\,\Big|_{\theta=0,\pi} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4-262}$$

由于绕圆的解是已知的，即

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} a_n r^{-1} \sin(n\theta) \tag{4-263}$$

式中，$a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \overline{W}(\cos\theta) \cdot \sin(n\theta) \cdot \sin\theta \mathrm{d}\theta$。

当 $\overline{W}$ 与 y 无关时，速度势有下列表达式：

$$\Phi(x,t) = W(x,t)\sqrt{S^2(x) - y^2} \tag{4-264}$$

式中

$$W(x,t) = U\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} \tag{4-265}$$

H 为翼面的位移函数。

于是，作用在翼面狭条上的压力差为

$$\Delta P = -2\rho\left(U\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) \tag{4-266}$$

对于半顶角为 ϵ 的小展弦比平板三角翼(图 4-26)：

$$S(x) = x\,\mathrm{tg}\epsilon \tag{4-267}$$

压差公式变为：

$$\begin{aligned} \Delta P &= -2\rho\left(U\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left[W(x,t)\sqrt{x^2\mathrm{tg}^2\epsilon - y^2}\right] \\ &= -2\rho\left(U\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\left(U\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t}\right)\sqrt{x^2\mathrm{tg}^2\epsilon - y^2}\right] \end{aligned} \tag{4-268}$$

在应用该方法时应注意到，它适用于：

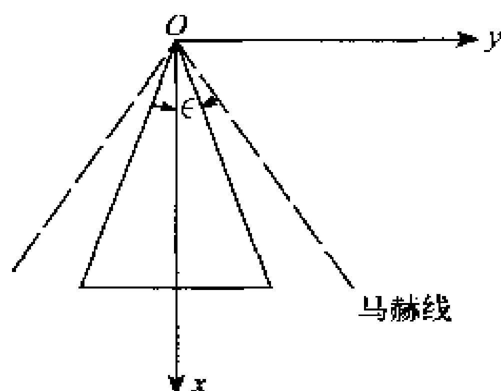


图 4-26　平板三角翼

(1)亚音速前缘,超音速或者平直后缘;

(2)小展弦比、细长、对称、尖头薄翼;

(3)翼面厚度和无因次下洗与展弦比相比较,都要很小。

与亚音速狭条理论相似,在推导过程中未计及马赫数的影响。可以认为:它适用于低超音速。与活塞理论比较,对图 4-26 所示的细长尖头三角翼,按照文献[33]的分析:

细长机翼理论适用于:$M\varepsilon<0.5$。

活塞理论适用于:$M\varepsilon>1.0$。

现在,我们考察长度方向的尺寸远大于其他另外两个方向(高度和宽度)的细长物体(如图 4-27 所示),且后两个尺寸具有相同的数量级。在细长体理论中,要用到细长比这一参数:

$$\lambda_B=\frac{d_{B_{\max}}}{l_B} \tag{4-269}$$

其中 $d_{B_{\max}}$ 表示物体(我们讨论旋成体)的最大直径,物体外形的当地半径为 $R_B(x)$,物体本身作垂直振动 $h(x,t)$。我们假定物体是如此之细长,由它引起的扰动速度与气流速度相比是小的,引入条件[32]:

$$\lambda_B\ll 1,k=\frac{\omega l_B}{U}\gg 1,\ kM\lambda_B\ll 1,\ \bar{h}\ll R,\ M\ll \bar{h}^{\,1} \tag{4-270}$$

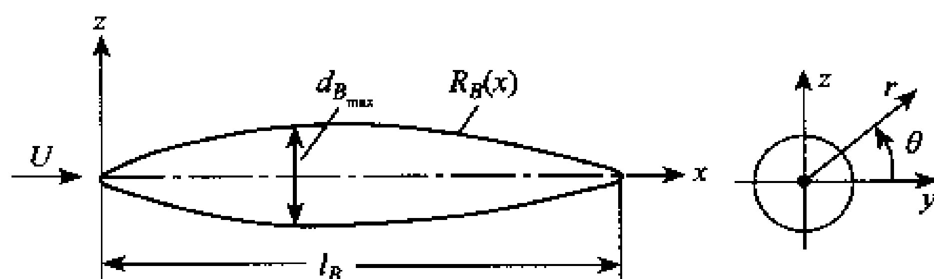


图 4-27　细长体几何

于是,在线性位势方程式中可略去$\partial^2\Phi/\partial x^2$ 项。利用圆柱坐标 $y=r\cos\theta$ 和 $z=r\sin\theta$,并引入无因次的时间变量

$$\tau=\frac{Ut}{l_B} \tag{4-271}$$

则计算压缩性流的简谐振动旋成体上的非定常升力的问题化为求解简单的二元位势方程式:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}=M^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2} \tag{4-272}$$

考虑(线性的)动力流动条件

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi(x,r,\theta,t)}{\partial r}\Big|_{r=R(x)}&=\overline{W}(x)\sin\theta\cdot\mathrm{e}^{ik\tau}\\&=(U\frac{\mathrm{d}\bar{h}}{\mathrm{d}x}+\mathrm{i}\omega\bar{h})\sin\theta\mathrm{e}^{ik\tau}\end{aligned} \tag{4-273}$$

于是,位势方程式(4-272)的一个解为

$$\Phi(x,r,\theta,t)=\frac{\overline{W}(x)H_1^{(2)}(Mkr)\sin\theta\mathrm{e}^{ik\tau}}{kM[H_1^{(2)}(kMr)]_{r=R(x)}} \tag{4-274}$$

其中 $H_1^{(2)}$ 表示一阶汗克第二类圆柱函数。推广到 $r\sim R=0(\lambda_B)$,则

$$\Phi(x,y,\theta,t)=-\overline{W}(x)R^2(x)\frac{\sin\theta}{r}\mathrm{e}^{ik\tau}\{1+O[(kM\lambda_B)^2\ln(kM\lambda_B)]\} \tag{4-275}$$

将其线性部分引入线性的压力公式

$$P-P_{\infty}=\rho U^2\sin\theta\left[2\frac{\mathrm{d}R_B}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}\bar{h}}{\mathrm{d}x}+\frac{2\mathrm{i}kR}{l_B}\frac{\mathrm{d}\bar{h}}{\mathrm{d}x}+\frac{2\mathrm{i}k\bar{h}}{l_B}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\right.$$
$$\left.R\frac{\mathrm{d}^2\bar{h}}{\mathrm{d}x^2}-\frac{k^2R\bar{h}}{l_k^2}\right] \tag{4-276}$$

z 向的压力分量沿整个横剖面外形 $r=R(x)$ 积分，则作用在单位长度上的非定常压差为：

$$\Delta P(x,t)=-\pi\rho\left(U\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[B(x)\left(U\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial t}\right)\right] \tag{4-277}$$

其中

$$B(x)=R^2(x) \tag{4-278}$$

对于如图 4-28 所示的对称翼—身组合体剖面形状：

$$B(x)=S^2(x)-R^2(x)+\frac{R^4(x)}{S^2(x)} \tag{4-279}$$

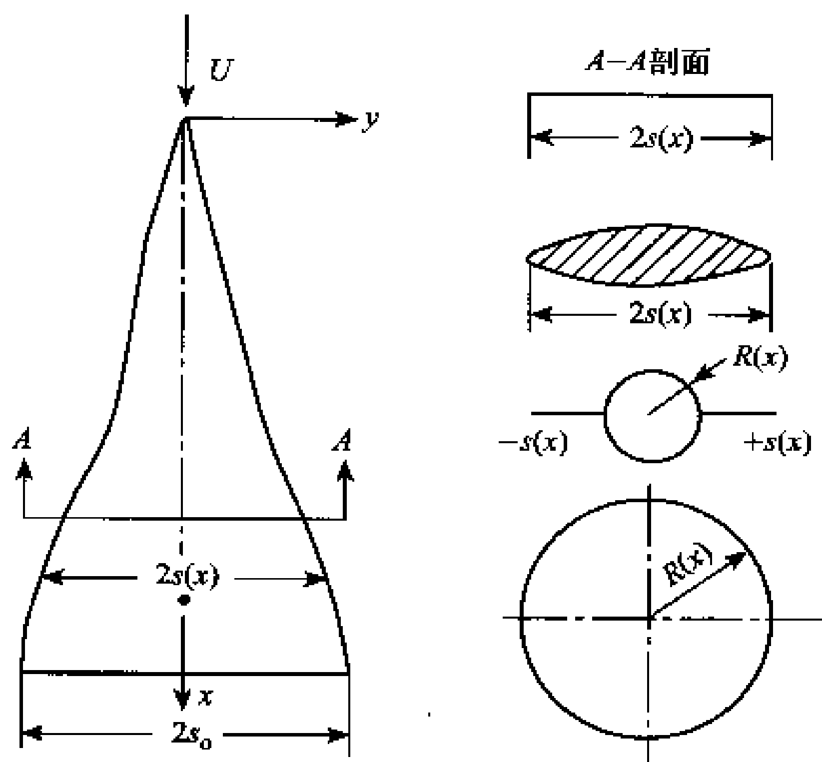


图 4-28　对称的翼—身组合体

§ 10. 非定常牛顿流理论

在很高的 M 数下，进行颤振分析应以非定常牛顿流理论计算气动力。

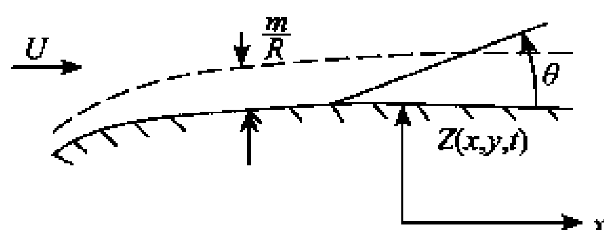


图 4-29　非定常牛顿流动图形

零攻角时，具有对称翼型的翼面位移函数可表示为：

$$\left.\begin{aligned}&\text{上翼面}\quad Z(x,y,t)=H(x,y,t)+\tau(x,y)\\&\text{下翼面}\quad Z(x,y,t)=H(x,y,t)-\tau(x,y)\end{aligned}\right\}\tag{4-280}$$

式中，$\tau(x,y)$为翼型的厚度函数。

翼面 $Z(x,y,t)$上的压力[34]：

$$P-P_\infty=\frac{mU_\theta^2}{R}+\rho_\infty U^2\left[\text{tg}\theta-\frac{1}{U}\frac{\partial Z(x,y,t)}{\partial t}\right]^2\cos^2\theta+m\frac{\partial^2 Z(x,y,t)}{\partial t^2}\tag{4-281}$$

式中，

$$m=\frac{\rho_\infty}{\cos\theta}\frac{\tau(x,y)}{2}$$

$$U_\theta=U\cos\theta$$

于是

$$\frac{P-P_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U^2}=\frac{\tau(x,y)\cos\theta}{R}+2\cos^2\theta\left[\text{tg}\theta+\frac{1}{U}\frac{\partial Z(x,y,t)}{\partial t}\right]^2+$$

$$\frac{\tau(x,y)}{U^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 Z(x,y,t)}{\partial t^2}$$

$$=\frac{\tau(x,y)\dfrac{\partial^2 Z(x,y,t)}{\partial x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\partial Z(x,y,t)}{\partial x}\right)^2\right]^3}+\frac{2\left[\dfrac{\partial Z(x,y,t)}{\partial x}+\dfrac{1}{U}\dfrac{\partial Z(x,y,t)}{\partial t}\right]^2}{1+\left[\dfrac{\partial Z(x,y,t)}{\partial x}\right]^2}+$$

$$\frac{\tau(x,y)\sqrt{1+\left[\dfrac{\partial Z(x,y,t)}{\partial x}\right]^2}}{U^2}\frac{\partial^2 Z(x,y,t)}{\partial t^2} \tag{4-282}$$

且 $\dfrac{P-P_\infty}{\dfrac{1}{2}\rho_\infty U^2}=C_p=f\left[\dfrac{\partial^2 Z(x,y,t)}{\partial x^2},\dfrac{\partial Z(x,y,t)}{\partial x},\dfrac{\partial Z(x,y,t)}{\partial x}+\right.$

$\left.\dfrac{1}{U}\dfrac{\partial Z(x,y,t)}{\partial t},\dfrac{1}{U^2}\dfrac{\partial^2 Z(x,y,t)}{\partial t^2}\right]$

则作用在翼面上的压力差：

$$\Delta P(x,y,t)=(P-P_\infty)_{上翼面}-(P-P_\infty)_{下翼面}$$

用台劳级数表示之，即

$$\Delta P(x,y,t)=\frac{1}{2}\rho_\infty U^2\left\{\frac{2\tau(x,y)}{1+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial\tau(x,y)}{\partial x}\right)^2]^3}\frac{\partial^2 H(x,y,t)}{\partial x^2}-\right.$$

$$\frac{3\tau(x,y)\dfrac{\partial^2\tau(x,y)}{\partial x^2}\dfrac{\partial\tau(x,y)}{\partial x}}{\left[1+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial\tau(x,y)}{\partial x}\right)^2\right]^4}\frac{\partial H(x,y,t)}{\partial x}+$$

$$\frac{4\dfrac{\partial\tau(x,y)}{\partial x}}{1+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial\tau(x,y)}{\partial x}\right)^2}\left[\frac{\partial H(x,y,t)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{U\cos\theta}\frac{\partial H(x,y,t)}{\partial t}\right]+$$

$$\left.\frac{2\tau(x,y)\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{\partial\tau(x,y)}{\partial x}\right]^2}}{U^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 H(x,y,t)}{\partial t^2}\right\} \tag{4-283}$$

第五章　小展弦比翼面的颤振分析

§1. 颤振理论

为进行以下的分析、讨论，我们首先建立颤振运动方程式。

设翼面（或机体）的颤振形态由 N 阶固有振型的线性组合来近似，即

$$H(x,y,t)=\sum_{i=1}^{N}h_i(x,y)\,q_i(t)\qquad(i=1,2,\cdots,N)\tag{5-1}$$

式中，$h_i(x,y)$为第 i 阶固有振型，$q_i(t)$为广义坐标。

再假设翼面（或机体）发生颤振时，仍作简谐运动，$q_i(t)=\overline{q}_i e^{i\omega t}$，其中 ω 为振动频率。此时，我们所考察的系统（如翼面、舵面或者机体）的动能和位能表示为：

$$T=\frac{1}{2}\iint_s m(x,y)[\dot{H}(x,y,t)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{5-2}$$

$$U=\frac{1}{2}\iint_s K(x,y)[H(x,y,t)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{5-3}$$

式中，$m(x,y)$为系统的质量分布函数，$K(x,y)$为系统的刚度分布函数，s 表示对整个系统的积分面积。在颤振分析中，通常只考察对称颤振情况（或者反对称颤振情况），积分面积变为$\frac{s}{2}$（例如半个翼面）。

根据正交性条件

$$\iint_s m(x,y)h_i(x,y)h_j(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ M_i & (i=j)\end{cases}\tag{5-4}$$

知

$$\iint_s K(x,y)h_i(x,y)h_j(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \omega_i^2 M_i & (i = j) \end{cases} \tag{5-5}$$

于是

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} M_i[\dot{q}_i(t)]^2 \tag{5-6}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 M_i[q_i(t)]^2 \tag{5-7}$$

式中，M_i 为第 i 阶固有振型的广义质量，ω_i 为第 i 阶固有振动频率。

考虑结构的内阻尼，用逸散函数来表征，

$$D = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} g_i M_i \frac{\omega_i^2}{\omega}[\dot{q}_i(t)]^2 \tag{5-8}$$

式中，g_i 为对应于第 i 阶固有振型的结构阻尼系数，ω 为系统的颤振频率。

将(5-6)、(5-7)以及(5-8)式代人第二类拉格朗日运动方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \tag{5-9}$$

则得所求的颤振运动方程式为：

$$M_i \ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 M_i q_i(t) + g_i M_i \frac{\omega_i^2}{\omega}\dot{q}_i(t) = Q_i \tag{5-10}$$

式中，$M_i \ddot{q}_i(t)$ 表示系统的惯性力，$\omega_i^2 M_i q_i(t)$ 为系统的弹性力，$g_i M_i \frac{\omega_i^2}{\omega}\dot{q}_i(t)$ 为系统的广义阻尼力，Q_i 为广义气动力。

广义气动力的一般表达式为

$$Q_i = \sum_{i=1}^{N}\iint_s \Delta P(x,y,t)h_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5-11}$$

其中，$\Delta P(x,y,t)$ 为系统随时间变化的压力差。

对于不同的气动力理论，可写出广义气动力的不同表达式。

这里，我们按照第四章介绍的气动力理论，写出相应的广义气动力的表达式作为示例。

(1) 亚音速狭条理论

设绕机翼的任一剖面的流动是二元的，弦向剖面是刚硬的。我们考察具有单位展长的弦向翼段，如图 5-1 所示，令翼段有两个自由

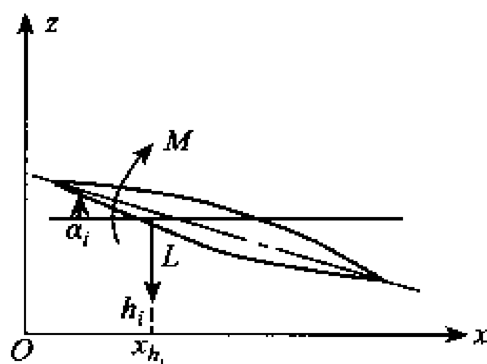


图 5-1　具有 $h(t)$和 $\alpha(t)$自由度的翼段

度：$h(t)$和 $\alpha(t)$，则翼段振型为：

$$h_i(x,t) = [\bar{h}_i + \bar{\alpha}_i(x - x_{hi})]\, q_i(t) \tag{5-12}$$

广义气动力表示为

$$\begin{aligned} Q_i &= \iint_s \Delta P(x,y,t) \cdot h_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^l \int_{-b}^{b} \Delta P[\bar{h}_i + \bar{\alpha}_i(x - x_{hi})]\, q_i(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sum_n \left\{ \bar{h}_i\, q_i \int_{-b}^{b} \Delta P\mathrm{d}x + \bar{\alpha}_i\, q_i \int_{-b}^{b} \Delta P(x - x_{hi})\mathrm{d}x \right\}_n \Delta y_n \\ &= \sum_n \{\bar{h}_i L_i + \bar{\alpha}_i M_i\}_n \Delta y_n\, q_i \end{aligned} \tag{5-13}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} L &= \pi\cos\Lambda \cdot \rho\,\omega^2 b^3 \left\{ L_h \cdot \frac{\bar{h}}{b} + L_\alpha\, \bar{\alpha} \right\} \\ M &= \pi\cos\Lambda \cdot \rho\,\omega^3 b^4 \left\{ M_h \cdot \frac{\bar{h}}{b} + M_\alpha\, \bar{\alpha} \right\} \end{aligned}\right\} \tag{5-14}$$

而

$$
\left.\begin{aligned}
L_h &= 1 + 2G/k - \mathrm{i}2F/k \\
L_\alpha &= \frac{1}{2} + (2/k)(G - F/k) - \mathrm{i}(2/k)(\frac{1}{2} + F + G/k) \\
M_h &= \frac{1}{2} \\
M_\alpha &= \frac{3}{8} - \mathrm{i}(1/k)
\end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}15)
$$

其中,$\cos\Lambda$ 是考虑机翼后掠角的影响。西奥道生函数的实部(F)和虚部(G)仅为减缩频率 k 的函数,与马赫数无关。对于假定的减缩频率(k_r),按公式 $k_i = \frac{k_r \cdot b_i}{b_r}$ 换算为各个翼段的减缩频率。

(2) 亚音速核函数方法

由下洗积分方程式确定出压力分布系数 a_{nm},则广义气动力可以写为:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{b_0} \iint_s \Delta P_j(x,y) h_i(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

将压力分布公式代入上式

$$
\begin{aligned}
Q_i &= \frac{4\rho U^2 l}{b_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \iint_s h_i(x,y) L_j(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{4\rho U^2 l^2}{b_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \int_0^1 \int_{-1}^1 h_i(\overline{x},\overline{y}) L_j(\overline{x},\overline{y}) \mathrm{d}\,\overline{x} \mathrm{d}\,\overline{y} \quad (5\text{-}16)
\end{aligned}
$$

引入弦向角变量 θ:

$$\overline{x} = \overline{x}_m - \frac{b}{b_0}\cos\theta \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi) \qquad (5\text{-}17)$$

式中,$\overline{x}_m$ 为翼型中线的无因次坐标。

于是

$$
\begin{aligned}
Q_i &= \frac{4\rho U^2 l^2}{b_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \int_0^1 \int_0^\pi h_i(\theta,\overline{y}) L_j(\theta,\overline{y}) \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\,\overline{y} \\
&= \frac{4\rho U^2 l^2}{b_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \cdot A_{ij} \qquad (5\text{-}18)
\end{aligned}
$$

式中，A_{ij} 为无因次的广义气动力系数；$\overline{y}=\frac{y}{l}$。而 A_{ij} 有如下的表达式：

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_0^1\int_0^\pi h_i(\theta,\overline{y})L_j(\theta,\overline{y})\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\,\overline{y} \\
&= \int_0^1\int_0^\pi h_i(\theta,\overline{y})\ \sqrt{1-\overline{y}^2}\Big[\cot\frac{\theta}{2}(a_{00}+a_{01}\,\overline{y}+ \\
&\quad a_{02}\,\overline{y}^2+\cdots)+\sin\theta(a_{10}+a_{11}\,\overline{y}+a_{12}\,\overline{y}^2+\cdots)- \\
&\quad \frac{1}{2}\sin2\theta(a_{20}+a_{21}\,\overline{y}+a_{22}\,\overline{y}^2+\cdots)+\cdots\Big]\cdot \\
&\quad \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\,\overline{y}
\end{aligned}
\tag{5-19}
$$

为了简化，引入下列定义：

$$
F_n(\theta)=\begin{cases}
\cot\frac{\theta}{2}\cdot\sin\theta=1+\cos\theta & (n=0)\\
\sin\theta & (n=1)\\
-\sin^2\theta\cdot\cos\theta & (n=2)\\
\cdots\cdots
\end{cases}
\tag{5-20}
$$

以及

$$
I_{nm}^{(i)}=\int_0^1\int_0^\pi \overline{y}^m\ \sqrt{1-\overline{y}^2}\cdot F_n(\theta)h_i(\theta,\overline{y})\mathrm{d}\theta\cdot \mathrm{d}\,\overline{y}
\tag{5-21}
$$

则

$$
A_{ij}=\sum_n\sum_m I_{nm}^{(i)}a_{nm}^{(j)}
\tag{5-22}
$$

写成矩阵形式：

$$
\begin{bmatrix}
A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1j}\\
A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2j}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} & \cdots & A_{ij}
\end{bmatrix}=
$$

$$
\begin{bmatrix}
I_{00}^{(1)} & I_{01}^{(1)} & I_{02}^{(1)} & \cdots & I_{nm}^{(1)}\\
I_{00}^{(2)} & I_{01}^{(2)} & I_{02}^{(2)} & \cdots & I_{nm}^{(2)}\\
\vdots & & & & \\
I_{00}^{(i)} & I_{01}^{(i)} & I_{02}^{(i)} & \cdots & I_{nm}^{(i)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_{00}^{(1)} & a_{00}^{(2)} & \cdots & a_{00}^{(j)}\\
a_{01}^{(1)} & a_{01}^{(2)} & \cdots & a_{01}^{(j)}\\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
a_{nm}^{(1)} & a_{nm}^{(2)} & \cdots & a_{nm}^{(j)}
\end{bmatrix}
\tag{5-23}
$$

式中

$$
{}_{\downarrow}^{n}\overset{m\rightarrow}{[I_{nm}^{(i)}]}=[\theta][h_i][\overline{Y}]
\tag{5-24}
$$

以及
$$\overset{n}{\downarrow}\overset{c\rightarrow}{[\theta]} = \overset{n}{\downarrow}\overset{c\rightarrow}{[F_n(\theta_c)]}[I_c] \tag{5-25}$$

$$\overset{s}{\downarrow}\overset{m\rightarrow}{[\overline{Y}]} = [I_s]\overset{s}{\downarrow}\overset{m\rightarrow}{\left[\overline{y}_s^m\sqrt{1-\overline{y}_s^2}\right]} \tag{5-26}$$

其中，I_c 为弦向积分的加权因子，I_s 为展向积分的加权因子。它们分别由拉格朗日插值函数的弦向积分和展向积分确定。

(3) 跨音速核函数方法

跨音速核函数方法的广义气动力的形式与亚音速核函数方法的类似。注意到压力系数的弦向函数和积分区域有所不同，此处就不列举了。

(4) 超音速狭条理论

超音速狭条理论的广义气动力公式与亚音速狭条理论的相似，在附录中我们将写出超音速狭条理论的气动力影响系数矩阵的表达式。这里，我们就美国海军部编写的《超音速空气动力学手册》刊载的颤振空气动力系数表（文献[27]），列出其广义气动力的公式。

设 L_i、M_i 分别为作用在某剖面处单位展长上的气动升力和力矩（作用在 1/4 弦点）：

$$\left.\begin{aligned} L_i &= -\pi\rho b^3\omega^2\left(C_{L_h}\cdot\frac{h_i}{b}+C_{L\alpha}\cdot\alpha_i\right) \\ &= -\pi\rho b^3\omega^2\left(C_{L_h}\cdot\frac{\overline{h}_i}{b}+C_{L\alpha}\cdot\overline{\alpha}_i\right)q_i(t) \\ M_i &= -\pi\rho b^4\omega^2\left(C_{m_h}\cdot\frac{\overline{h}_i}{b}+C_{m_\alpha}\cdot\overline{\alpha}_i\right)q_i(t) \end{aligned}\right\} \tag{5-27}$$

则广义气动力表示为

$$\begin{aligned} Q_i = -\pi\rho\omega^2\sum_n\Bigg\{\sum_j\Bigg[&\left(C_{L_h}\cdot\frac{\overline{h}_j}{b^2}+C_{L\alpha}\frac{\overline{\alpha}_j}{b}\right)\overline{h}_i + \\ &\left(C_{m_h}\cdot\frac{\overline{h}_j}{b}+C_{m_\alpha}\overline{\alpha}_j\right)\overline{\alpha}_i\Bigg]_n\cdot\Delta y_n\Bigg\}q_i(t) \end{aligned} \tag{5-28}$$

式中，Δy_n 为展向的分段宽度，沿翼展共分成 n 段。

(5) 超音速位势理论

对于弦向剖面不变形的三角翼或全动式舵面，作平移、俯仰和朴振三种形式的振动，而略去滚动形态。选取两个广义坐标来描述翼面的运动，得

$$\left.\begin{aligned} h(t) &= h_1\, q_1(t) + h_2\, q_2(t) \\ \alpha(t) &= \alpha_1\, q_1(t) + \alpha_2\, q_2(t) \\ f(t) &= f_1\, q_1(t) + f_2\, q_2(t) \end{aligned}\right\} \tag{5-29}$$

式中　$q_i(t) = \overline{q}_i e^{i\omega t}$。

广义气动力的表达式可以写成：

$$Q_i = 8\rho b^5 \omega^2 \sum_j A_{ij}\, \overline{q}_i e^{i\omega t} \quad (i, j = 1, 2) \tag{5-30}$$

式中，A_{ij} 为广义气动力系数。把它表达成矩阵形式，即

$$\begin{Bmatrix} -A_{11} \\ -A_{12} \\ -A_{21} \\ -A_{22} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{h_1}{b}\right)^2, & \frac{f_1 h_1}{b}, & \frac{h_1\alpha_1}{b}, & f_1\alpha_1, & \frac{h_1 f_1}{b}, & f_1^2, & \frac{\alpha_1 h_1}{b}, & \alpha_1^2, & \alpha_1 f_1 \\ \frac{h_1 h_2}{b^2}, & \frac{f_1 h_2}{b}, & \frac{h_1\alpha_2}{b}, & f_1\alpha_2, & \frac{h_1 f_2}{b}, & f_1 f_2, & \frac{\alpha_1 h_2}{b}, & \alpha_1\alpha_2, & \alpha_1 f_2 \\ \frac{h_2 h_1}{b^2}, & \frac{f_2 h_1}{b}, & \frac{h_2\alpha_1}{b}, & f_2\alpha_1, & \frac{h_2 f_1}{b}, & f_2 f_1, & \frac{\alpha_2 h_1}{b}, & \alpha_2\alpha_1, & \alpha_2 f_1 \\ \left(\frac{h_2}{b}\right)^2, & \frac{f_2 h_2}{b}, & \frac{h_2\alpha_2}{b}, & f_2\alpha_2, & \frac{h_2 f_2}{b}, & f_2^2, & \frac{\alpha_2 h_2}{b}, & \alpha_2^2, & \alpha_1 f_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \end{Bmatrix} \tag{5-31}$$

若以 a_{mn} 代替(5-31)式右边方阵中的诸元素,(其中 $m=1,2,3,4$, $n=1,2,3,4,5,6,7,8,9$),则

$$\begin{Bmatrix} -A_{11} \\ -A_{12} \\ -A_{21} \\ -A_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & a_{49} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \end{Bmatrix} \tag{5-32}$$

或者

$$\left.\begin{aligned} -A_{11} &= \sum_{n=1}^{9} a_{1n} I_n \\ -A_{12} &= \sum_{n=1}^{9} a_{2n} I_n \\ -A_{21} &= \sum_{n=1}^{9} a_{3n} I_n \\ -A_{22} &= \sum_{n=1}^{9} a_{4n} I_n \end{aligned}\right\} \tag{5-33}$$

对于半翼展,积分 I_n 表示为:

$$\left.\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{y_t}(L_1 + \mathrm{i}L_2)\mathrm{d}y \\
I_2 &= \int_0^{y_t}2\mid y\mid(L_1 + \mathrm{i}L_2)\mathrm{d}y \\
I_3 &= \int_0^{y_t}(L_3 + \mathrm{i}L_4)\mathrm{d}y \\
I_4 &= \int_0^{y_t}2\mid y\mid(L_3 + \mathrm{i}L_4)\mathrm{d}y \\
I_5 &= \int_0^{y_t}(L_5 + \mathrm{i}L_6)\mathrm{d}y \\
I_6 &= \int_0^{y_t}2\mid y\mid(L_5 + \mathrm{i}L_6)\mathrm{d}y \\
I_7 &= \int_0^{y_t}(M_1 + \mathrm{i}M_2)\mathrm{d}y \\
I_8 &= \int_0^{y_t}(M_3 + \mathrm{i}M_4)\mathrm{d}y \\
I_9 &= \int_0^{y_t}(M_5 + \mathrm{i}M_6)\mathrm{d}y
\end{aligned}\right\} \tag{5-34}$$

式中，积分上限 $y_t = \dfrac{\lambda}{1-\lambda D}$。此外，$\lambda$，$D$ 的定义见第四章的§6。

(6) 准定常二次理论

广义气动力表示为

$$Q_i = -2\rho a \cdot \frac{M}{\beta}\sum_{j=1}^{N}\iint_s\left[1+\overline{G}\frac{\partial\tau}{\partial x}\right]\left[U\frac{\partial h_j}{\partial x}+\frac{\partial h_j}{\partial t}\right]h_i\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5-35}$$

或者改写为：

$$Q_i = -2\rho a^2\frac{M}{\beta}\sum_{j=1}^{N}\left[M(b_{ij}+\overline{G}c_{ij})\,q_j+\frac{1}{a}(d_{ij}+\overline{G}e_{ij})\,\dot{q}_j\right] \tag{5-36}$$

式中，a 为音速。

$$\left.\begin{aligned}
b_{ij} &= \iint_s \frac{\partial h_j(x,y)}{\partial x} h_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
c_{ij} &= \iint_s \frac{\partial \tau(x,y)}{\partial x} \frac{\partial h_j(x,y)}{\partial x} h_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
d_{ij} &= \iint_s h_i(x,y) h_j(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
e_{ij} &= \iint_s \frac{\partial \tau(x,y)}{\partial x} h_i(x,y) h_j(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}\right\} \tag{5-37}$$

(7) 活塞理论

广义气动力的表达式为：

$$\begin{aligned}
Q_i &= -2\rho a \sum_{j=1}^{N} \iint_s \left[1 + G\frac{\partial \tau}{\partial x}\right]\left[U\frac{\partial h_j}{\partial x} + \frac{\partial h_j}{\partial t}\right] h_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -2\rho a^2 \sum_{j=1}^{N} \left[M(b_{ij} + G c_{ij}) q_j + \frac{1}{a}(d_{ij} + G e_{ij}) \dot{q}_j\right]
\end{aligned} \tag{5-38}$$

式中的 $b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, e_{ij}$ 与准定常二次理论相同。在准定常二次理论的广义气动力表达式中，比活塞理论多了一个倍乘因子$\dfrac{M}{\beta}$，并以$\overline{G}$代替 G。

(8) 细长机翼理论

对于半顶角为 ϵ 的尖头三角翼，广义气动力表示为：

$$\begin{aligned}
Q_i = -2\rho a^2 \sum_{j=1}^{N} \Big[& \frac{1}{a^2} b_{ij} \frac{\ddot{q}_j}{b_0} + \frac{M}{a}(c_{ij} + 2d_{ij}) \frac{\dot{q}_j}{b_0} + \\
& M^2 (e_{ij} + f_{ij}) \frac{q_j}{b_0} \Big]
\end{aligned} \tag{5-39}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned}
b_{ij} &= \iint_s \sqrt{x^2\text{tg}^2\epsilon - y^2}\,h_i(x,y)h_j(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
c_{ij} &= \iint_s \frac{x\,\text{tg}^2\epsilon}{\sqrt{x^2\text{tg}^2\epsilon - y^2}}h_i(x,y)h_j(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
d_{ij} &= \iint_s \sqrt{x^2\text{tg}^2\epsilon - y^2}\,h_i(x,y)\frac{\partial h_j(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
e_{ij} &= \iint_s \frac{x^2\text{tg}^2\epsilon}{\sqrt{x^2\text{tg}^2\epsilon - y^2}}h_i(x,y)\frac{\partial h_j(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
f_{ij} &= \iint_s \sqrt{x^2\text{tg}^2\epsilon - y^2}\,h_i(x,y)\frac{\partial^2 h_j(x,y)}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}\right\} \tag{5-40}$$

(9) 非定常牛顿流理论

将(4-283)式代人广义气动力的一般表达式(5-11)，则

$$Q_i = \rho a^2 \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{a^2\cos^2\theta}b_{ij}\ddot{q}_j + \frac{2M}{a\cos\theta}c_{ij}\dot{q}_j + M^2(2d_{ij} - 6e_{ij} + f_{ij})\right] \tag{5-41}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
b_{ij} &= \iint_s \tau\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2}h_jh_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
c_{ij} &= \iint_s \frac{\dfrac{\partial\tau}{\partial x}}{1+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2}h_jh_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
d_{ij} &= \iint_s \frac{\dfrac{\partial\tau}{\partial x}}{1+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial h_j}{\partial x}h_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
e_{ij} &= \iint_s \frac{\tau\dfrac{\partial^2\tau}{\partial x^2}\dfrac{\partial\tau}{\partial x}}{\left[1+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2\right]^4}\frac{\partial h_j}{\partial x}h_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
f_{ij} &= \iint_s \frac{\tau}{\left[1+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2\right]^3}\frac{\partial^2 h_j}{\partial x^2}h_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}\right\} \tag{5-42}$$

在文献[35]中，利用线性势流理论（包括亚音速配置法，即亚音速核函数方法，亚音速偶极子网络法，音速配置法，超音速分块积分法，超音速分块配置法以及超音速配置法等），就振动薄翼上的广义气动力的计算结果进行了比较。所涉及的参数包括：

(1) 平面形状：展弦比 0～4，前缘后掠角 0°～60°。

(2) 马赫数 0～2，包括亚音速、音速和超音速三个区域。

(3) 减缩频率 0～4。

(4) 振型：刚体振型，抛物线变形以及操纵面偏转。

该报告中的广义气动力表示为

$$Q_i = -\rho U^2 l^3 \sum Q_{ij}\, q_j(t)$$

其中，$Q_{ij} = Q'_{ij} + \mathrm{i}kQ''_{ij}$ 为广义气动力系数，类似于上述亚音速核函数的广义气动力系数 A_{ij}；l 为机翼的半翼展；k 为减缩频率。文中列举了大量的计算数据表和曲线图，以确定计算振动机翼上的气动力的不同方法的优缺点，并提供将来同试验结果作比较的标准。由于篇幅所限，这里不予引用。

将上面列举的广义气动力的表达式代入颤振运动方程式(5-10)，令对应各阶固有振型的结构阻尼系数相等（即 $g_1 = g_2 = \cdots = g$），经过化简、整理，颤振运动方程式改写成矩阵形式：

$$\overline{\Omega}\{\overline{q}\} = [u][\overline{q}] \tag{5-43}$$

式中，$\overline{\Omega}$称为复特征值，形如

$$\overline{\Omega} = \left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2 (1 + \mathrm{i}g) \tag{5-44}$$

其中，ω_2 为系统的第二阶固有振动频率，ω 为系统的颤振频率。$[u]$ 称为动力矩阵，它包括惯性耦合项，结构弹性项以及气动力项组合的复杂形式。由于颤振分析当中，需采用不同的气动力理论，因此动力矩阵的形式有所不同。但在其对角线上的元素中包含有惯性耦合项，这却是共同的。这里，我们就不一一列举，仅以亚音速核函数方法为例：

$$[u]=\begin{bmatrix}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\left(1+\frac{A_{11}}{k^2\mu_1}\right), & \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\frac{A_{12}}{k^2\mu_1}, & \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\frac{A_{13}}{k^2\mu_1}, & \cdots \\ \frac{A_{21}}{k^2\mu_2}, & 1+\frac{A_{22}}{k^2\mu_2}, & \frac{A_{23}}{k^2\mu_2}, & \cdots \\ \left(\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)^2\frac{A_{31}}{k^2\mu_3}, & \left(\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)^2\frac{A_{32}}{k^2\mu_3}, & \left(\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)^2\left(1+\frac{A_{33}}{k^2\mu_3}\right), & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\end{bmatrix} \tag{5-45}$$

式中，$k=\frac{b_0\omega}{U}$，

$\frac{1}{\mu_i}=\frac{4\rho l^2 b_0}{M_i}$，

A_{ij} 为无因次广义气动力系数(见(5-23)式)。

对(5-43)式施矩阵迭代运算，得到

$$\overline{\Omega}=\overline{\Omega}_R+\mathrm{i}\,\overline{\Omega}_I \tag{5-46}$$

式中，$\overline{\Omega}_R$，$\overline{\Omega}_I$ 分别为复特征值的实部和虚部。

于是

$$\text{颤振频率 } \omega_f=\frac{\omega_2}{\sqrt{\overline{\Omega}_R}} \tag{5-47}$$

$$\text{结构阻尼系数 } g=\frac{\overline{\Omega}_I}{\overline{\Omega}_R} \tag{5-48}$$

$$\text{颤振临界速度 } U_f=\frac{b_0\omega}{k} \tag{5-49}$$

$$\text{或者 } M_f=\frac{b_0\omega}{ak} \tag{5-50}$$

值得指出的是，对于气动力随马赫数变化的情况(如亚音速核函数方法，活塞理论等)，当满足

$$\left.\begin{aligned} M_{\text{假设}} &= M_{\text{计算}} \\ \omega_{\text{假设}} &= \omega_{\text{计算}} \\ g &= 0(\text{或达到 } 10^{-6} \text{ 的量级}) \end{aligned}\right\} \tag{5-51}$$

时，即得所求的颤振结果。对于气动力不随马赫数变化的情况（如亚音速狭条理论，细长机翼理论），仅以 $g=0$ 作为判别条件。

系统的颤振形态可按下式确定：

$$\{h^{(i+1)}\}_{i-j} = \{h^{(i-j+1)}\}_{i,j} - \frac{(\overline{\Omega}^{(i-j+1)} - \overline{\Omega}^{(i+1)})}{\lfloor U_{i-j+1}^{(i-j)} \rfloor \{h^{(i+1)}\}_{i-j+1}} \{h^{(i+1)}\}_{i-j+1} \tag{5-52}$$

§ 2. 典型例子

以下，我们对几个典型机翼进行颤振分析计算。

例 1　翼尖携带油箱（或冲压发动机）的矩形翼（图 5-2）。

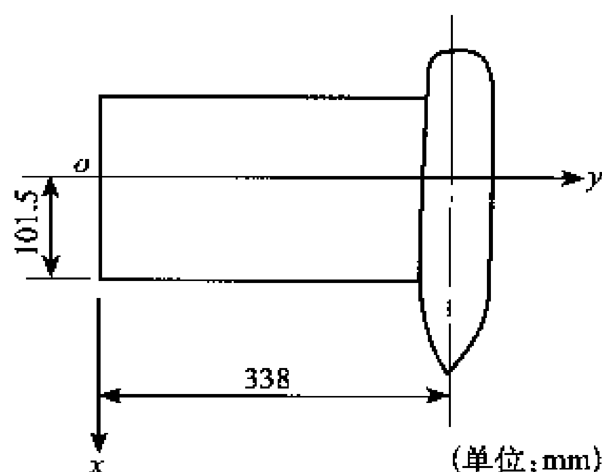


图 5-2　矩形翼（翼尖携带油箱）

首先，采用亚音速核函数方法。此时，坐标变换式为：

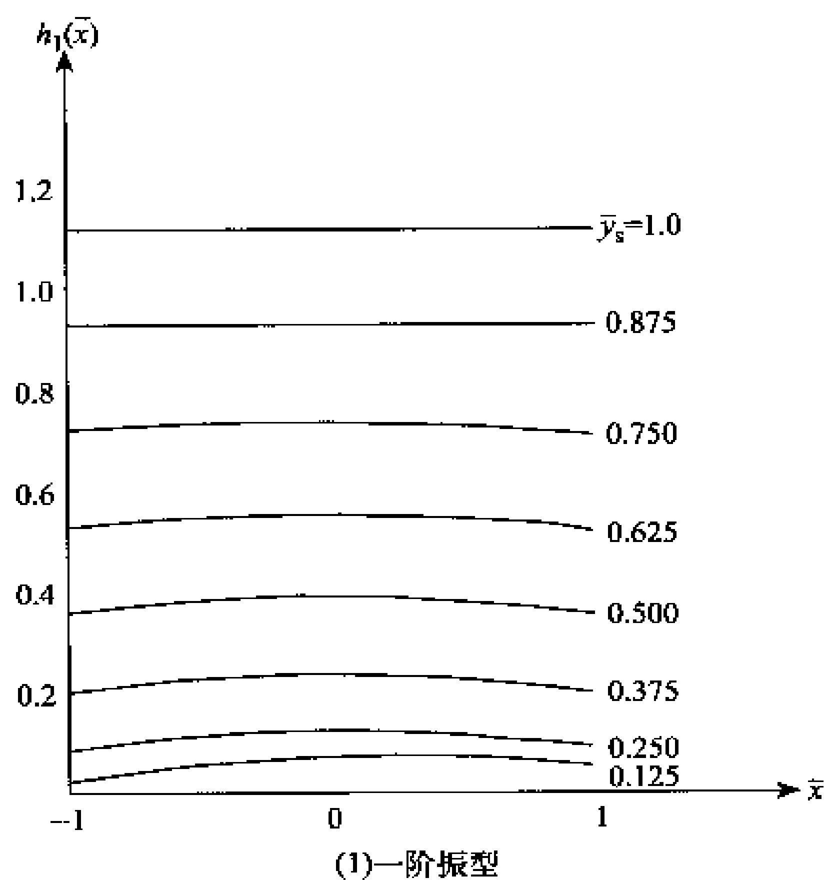
$$\underline{x} = \tilde{x}$$

$$\underline{y} = \frac{b_0}{l}\tilde{y}$$

$$\frac{l}{b_0} = 3.325$$

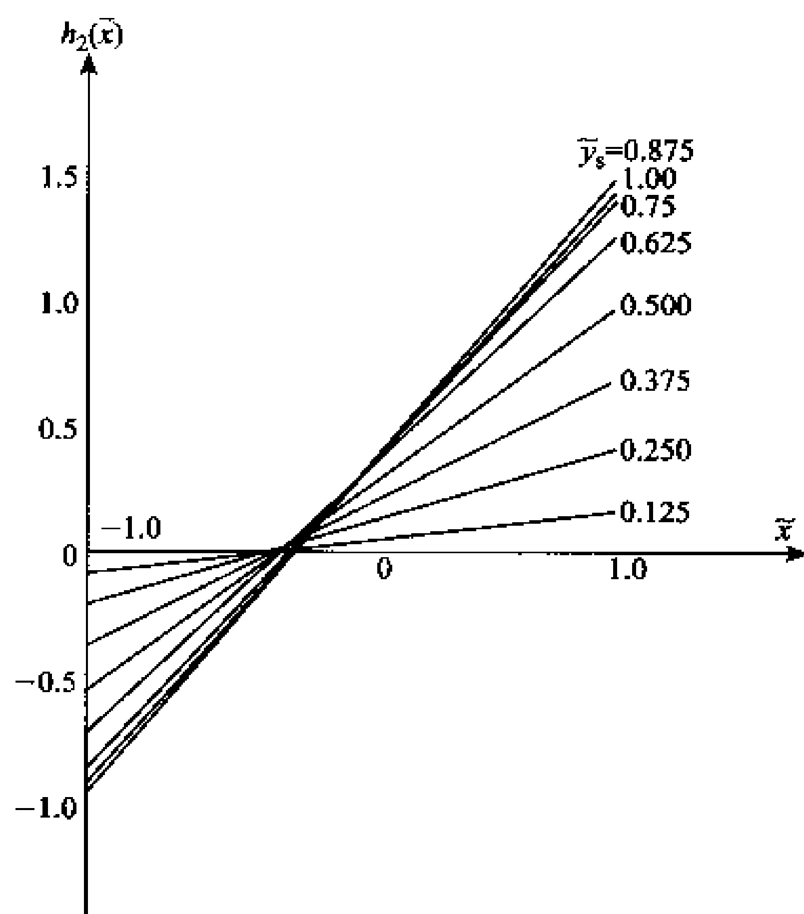
$$b(\underline{\eta}) = b_0$$

我们只考察对称情况。在半个翼面上选取 9 个下洗配置点(其坐标与表 4-3 相同);在整个翼面上取 21 个积分点(其坐标与表 4-4 相同)。



(1)一阶振型

图 5-3 矩形翼的固有振型



(2)二阶振型

图 5-3 矩形翼的固有振型

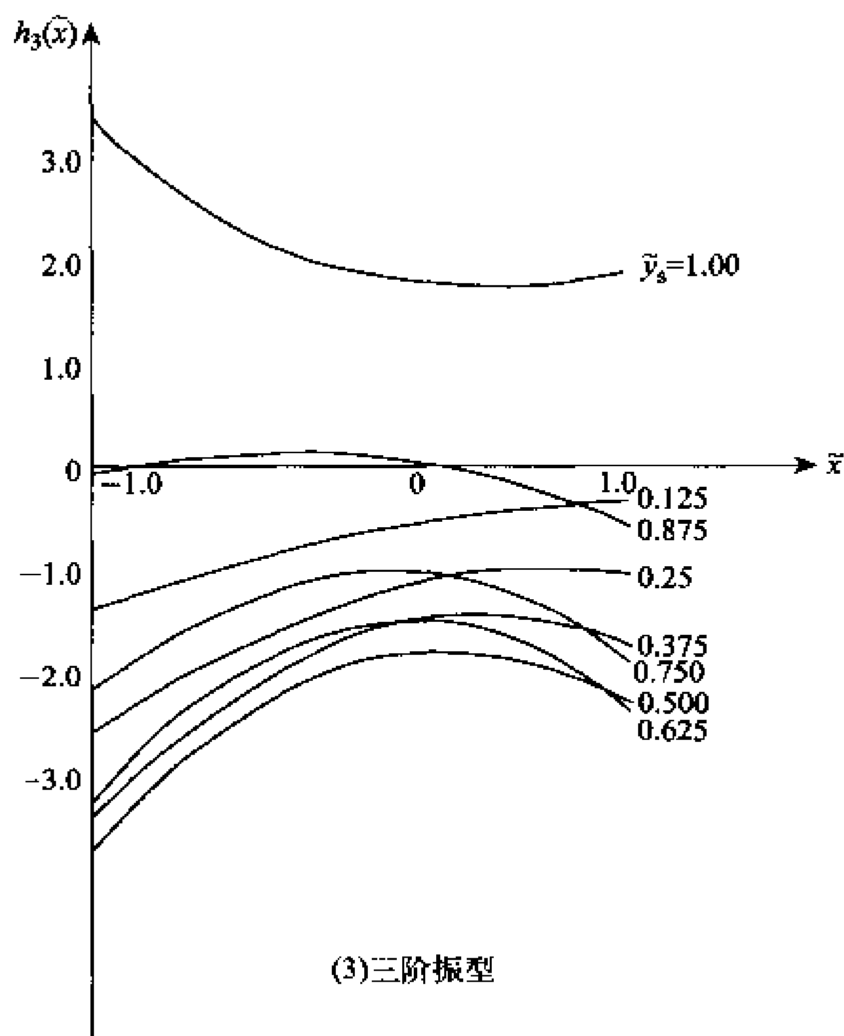


图 5-3 矩形翼的固有振型

在计算中采取前三阶固有振型，其图形如图 5-3 所示。广义质量按集中在结构控制点（其展向坐标为 $y/l=0.2,0.5,0.8$；弦向无因次坐标为 $x/b_0=-0.6,0,0.6$）上的 9 小块机翼质量计算，即

$$M_i = \sum_{k=1}^{9} m_k [h_i]_k^2$$

按表 5-1 的数据得到的广义质量为

$$M_1 = 0.060993$$

$$M_2 = 0.061322$$

$$M_3 = 0.21327$$

表 5-1 结构控制点的振型和质量数据

结构控制点	1	2	3	4	5	6	7	8	9
一阶振型	0.105 0	0.114 4	0.097 57	0.480 8	0.494 4	0.485 0	1.008	1.001 8	1.001 1
二阶振型	−0.117 5	0.051 42	0.235 1	−0.356 0	0.189 7	0.746 8	−0.471 9	0.272 3	1.000 0
三阶振型	−0.900 8	−1.169 1	−1.799 1	−1.885 6	−1.769 7	−2.559 0	0.500 8	0.761 6	1.009 7
分块质量×1.485 $\frac{\text{kg}\cdot\text{s}^2}{\text{m}}$	0.010 21①	0.015 84	0.009 288	0.008 694	0.013 5	0.007 944	0.067 56	−0.060 36	0.045 72

①所列质量数据为翼尖油箱未装填时的有效质量(见文献[36])

对于 9 个下洗配置点,下洗条件写为:

$$\{\overline{W}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_r)\}_{1\times 9} = -4\pi\rho U^2 \left\{\frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} + \mathrm{i}kh\right\}_{1\times 9}$$

下洗配置点上的振型值及其斜率列于表 5-2。

表 5-2 下洗配置点的振型值及其斜率

下洗配置点	$\tilde{x}_i$	$\tilde{y}_r$	h_1	h_2	h_3	$\frac{\partial h_1}{\partial \tilde{x}}$	$\frac{\partial h_2}{\partial \tilde{x}}$	$\frac{\partial h_3}{\partial \tilde{x}}$
1	−0.623 49	0.222 52	0.097 51	−0.119 0	−0.857 0	0.038 70	0.256 0	−0.136 8
2	−0.222 52	0.222 52	0.104 4	0.112 1	−1.319 4	0.022 40	0.290 4	−0.956 4
3	0.900 97	0.222 52	0.072 60	0.318 5	−2.191 2	−0.071 39	0.318 0	−1.613 7
4	−0.623 49	0.623 49	0.542 9	−0.410 3	−1.866 3	0.039 65	0.981 9	1.128 3
5	−0.222 52	0.623 49	0.556 2	0.429 5	−1.824 6	−0.008 168	1.003 5	−1.029 7
6	0.900 97	0.623 49	0.537 7	1.116 1	−3.110 3	−0.046 52	1.020 7	−2.760 4
7	−0.623 49	0.900 97	0.969 3	−0.507 6	0.140	−0.009 422	1.261 7	0.622 8
8	−0.222 52	0.900 97	0.964 7	0.545 7	0.510 6	−0.001 491	1.228 5	0.253 4
9	0.900 97	0.900 97	0.965 9	1.370 2	0.582 0	0.004 870	1.201 9	−0.042 88

将下洗条件代入联系下洗和压力分布的积分方程式(4-142)式，可求得翼面上的压力分布系数 a_{nm}，当 $M=0.5$，$k=0.06$ 时，对应于表 5-2 的第一、第二、第三阶振型的压力分布系数 a_{nm} 示于表 5-3。

表 5-3　矩形翼的压力分布系数($M=0.5$，$k=0.06$)

下洗条件 \ a_{nm}	a_{00}	a_{02}	a_{04}	a_{10}	a_{12}	a_{14}	a_{20}	a_{22}	a_{24}
第一振型	0.002 858 +0.001 812i	0.006 673 +0.007 565i	−0.013 50 +0.000 417 0i	−0.016 15 −0.000 530i	−0.009 685 −0.005 549i	0.081 17 −0.002 911i	−0.000 336 0 −0.000 704 1i	0.006 704 +0.003 327i	−0.008 864 +0.004 627i
第二振型	0.056 03 −0.004 807i	0.240 8 −0.006 724i	−0.091 26 +0.000 482 5i	−0.006 403 +0.011 35i	−0.222 0 +0.065 3i	0.047 45 −0.019 21i	0.019 15 −0.001 215i	0.137 9 +0.002 393i	−0.030 74 −0.010 11i
第三振型	−0.089 69 +0.001 614i	0.634 4 −0.042 18i	−0.551 8 +0.052 17i	−0.118 0 −0.020 90i	−1.823 3 +0.051 23i	1.891 9 −0.085 76i	−0.074 52 −0.012 58i	0.295 5 −0.181 5i	−0.166 3 +0.211 3i

按照(5-23)式，广义气动力系数 A_{ij} 写为：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{00}^{(1)} & I_{02}^{(1)} & I_{04}^{(1)} & \cdots & I_{24}^{(1)} \\ I_{00}^{(2)} & I_{02}^{(2)} & I_{04}^{(2)} & \cdots & I_{24}^{(2)} \\ I_{00}^{(3)} & I_{02}^{(3)} & I_{04}^{(3)} & \cdots & I_{24}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00}^{(1)} & a_{00}^{(2)} & a_{00}^{(3)} \\ a_{02}^{(1)} & a_{02}^{(2)} & a_{02}^{(3)} \\ a_{04}^{(1)} & a_{04}^{(2)} & a_{04}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{24}^{(1)} & a_{24}^{(2)} & a_{24}^{(3)} \end{bmatrix}$$

为了完成 I_{nm} 的积分，在半个翼面上选取 99 个积分点。弦向积分时，用五次拉格朗日函数逼近被积函数，且将弦向分成 10 等分；展向积分时，用四次拉格朗日函数逼近被积函数，并将展向分为 8 等分。此外，弦向积分和展向积分的加权因子及其积分点坐标示于表 5-4。

表 5-4　计算 A_{ij} 的数值积分点坐标和加权因子

(1) 弦向积分　$I_c=\frac{125}{144}\Delta\theta\cdot\bar{f}_c$　(其中 $\Delta\theta=\frac{\pi}{10}$)

弦向分点(c)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
θ°_c	0	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180
$\bar{f}_c$	0.38	1.50	1.00	1.00	1.50	0.76	1.50	1.00	1.00	1.50	0.38

(2) 展向积分　$I_s=\frac{2}{45}\Delta\bar{y}\cdot\bar{f}_s$　(其中 $\Delta\bar{y}=0.125$)

展向分点(s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{y}_s$	0	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.75	0.875	1.00
$\bar{f}_s$	7	32	12	32	14	32	12	32	7

对应于上述 99 个积分点的固有振型值,可由拉格朗日插值公式得到,列于表 5-5。

表 5-5　用于计算 A_{ij} 的固有振型值(99 点)

(1) 第一振型　$\overset{c}{\downarrow}\overset{s}{\overleftrightarrow{[h_1]}}$　$\omega_1=78.41(\text{rad/s})$

弦向分点(c) \ 展向分点(s)	θ°_c \ $\bar{y}_s$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		0	0.125	0.250	0.375	0.50	0.625	0.750	0.875	1.0
1	0	0	0.025 6	0.097 2	0.209	0.354	0.526	0.720	0.929	1.147
2	18	0	0.027 7	0.101	0.212	0.357	0.529	0.722	0.929	1.144
3	36	0	0.033 1	0.109	0.223	0.367	0.537	0.726	0.928	1.138
4	54	0	0.039 5	0.120	0.235	0.379	0.546	0.731	0.927	1.129
5	72	0	0.044 1	0.128	0.244	0.389	0.555	0.736	0.927	1.121

续表

弦向分点(c) \ 展向分点(s)		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	θ_c° \ $\bar{y}_s$	0	0.125	0.250	0.375	0.50	0.625	0.750	0.875	1.0
6	90	0	0.044 6	0.129	0.248	0.393	0.559	0.739	0.926	1.114
7	108	0	0.040 5	0.124	0.243	0.390	0.557	0.739	0.926	1.112
8	126	0	0.032 7	0.113	0.231	0.381	0.552	0.736	0.926	1.112
9	144	0	0.023 7	0.099 5	0.218	0.369	0.544	0.733	0.926	1.114
10	162	0	0.016 7	0.089 1	0.207	0.360	0.538	0.730	0.926	1.116
11	180	0	0.014 0	0.085 2	0.203	0.356	0.535	0.728	0.926	1.117

(2) 第二振型 $\overset{c}{\downarrow}\overset{s}{\leftrightarrow}[\bar{h}_2]$ $\omega_2=159.4(\text{rad/s})$

弦向分点(c) \ 展向分点(s)		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	θ_c° \ $\bar{y}_s$	0	0.125	0.250	0.375	0.50	0.625	0.750	0.875	1.0
1	0	0	−0.099 0	−0.249	−0.427	−0.611	−0.780	−0.911	−0.981	−0.968
2	18	0	−0.093 8	−0.235	−0.402	−0.575	−0.732	−0.854	−0.919	−0.906
3	36	0	−0.078 3	−0.193	−0.329	−0.468	−0.594	−0.690	−0.739	−0.726
4	54	0	−0.053 2	−0.128	−0.213	−0.299	−0.376	−0.434	−0.461	−0.450
5	72	0	−0.019 5	−0.041 4	−0.063 6	−0.084 0	−0.100	−0.111	−0.113	−0.106
6	90	0	0.020 2	0.057 9	0.107	0.158	0.207	0.247	0.269	0.269
7	108	0	0.062 7	0.161	0.280	0.404	0.518	0.604	0.649	0.636
8	126	0	0.103	0.258	0.442	0.630	0.800	0.927	0.989	0.924
9	144	0	0.137	0.337	0.572	0.811	1.025	1.183	1.258	1.217
10	162	0	0.159	0.389	0.657	0.928	1.170	1.348	1.429	1.379
11	180	0	0.167	0.408	0.687	0.969	1.220	1.405	1.488	1.434

(3) 第三振型 $\overset{c\leftrightarrow}{\underset{s}{}}[\bar{h}_3]$ $\omega_3=546.2(\mathrm{rad/s})$

弦向分点(c) \ 展向分点(s)	θ_c° \ $\bar{y}_s$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		0	0.125	0.250	0.375	0.50	0.625	0.750	0.875	1.0
1	0	0	−0.366	−1.035	−1.769	−2.327	−2.470	−1.950	−0.552	1.989
2	18	0	−0.370	−1.019	−1.721	−2.247	−2.371	−1.864	−0.50	1.950
3	36	0	−0.388	−0.989	−1.607	−2.048	−2.117	−1.619	−0.359	1.859
4	54	0	−0.434	−0.986	−1.504	−1.835	−1.825	−1.322	−0.172	1.777
5	72	0	−0.523	−1.062	−1.504	−1.733	−1.634	−1.093	0.005 54	1.776
6	90	0	−0.661	−1.249	−1.672	−1.837	−1.654	−1.030	0.128	1.910
7	108	0	−0.842	−1.544	−2.016	−2.171	−1.917	−1.167	0.171	2.185
8	126	0	−1.041	−1.902	−2.479	−2.668	−2.364	−1.462	0.143	2.555
9	144	0	−1.223	−2.249	−2.949	−3.196	−2.859	−1.812	0.750	2.930
10	162	0	−1.352	−2.501	−3.30	−3.596	−3.243	−2.091	0.010 1	3.209
11	180	0	−1.398	−2.593	−3.428	−3.745	−3.387	−2.20	−0.016 1	3.312

利用上述数据，当 $M=0.5$，$k=0.06$ 时，矩形翼的广义气动力系数 A_{ij} 值列于表 5-6。

表 5-6 矩形翼的 A_{ij} 值($M=0.5,k=0.06$)

i \ A_{ij} \ j	1	2	3
1	−0.003 279 +0.002 854i	−0.003 135 −0.002 385i	0.015 22 −0.008 204i
2	0.077 56 +0.006 798i	−0.058 62i +0.007 428i	−0.249 6 −0.015 5i
3	−0.143 4 −0.006 064i	−0.085 93 −0.006 926i	0.554 5 +0.036 39i

根据颤振方程式(5-43)

$$\bar{\Omega}\{\bar{q}\} = [u][\bar{q}]$$

分别求得两阶形态组合和三阶形态组合的颤振特性，其结果示于表 5-7。

图 5-4 给出了 $M=0.5$ 时作为中间结果的二阶形态组合的 M-g 图。

表 5-7 矩形翼的颤振特性($\rho=0.101\ 5\ \mathrm{kg\cdot s^2/m^4}$)

	试验值(文献[36])	亚音速核函数法		亚音速狭条理论	
		二阶组合	三阶组合	未修正	修正
M_f	0.506	0.537	0.528	0.441	0.529
ω_f(1/s)	103.6	108	108	122.7	117.6
k_f	0.059 3	0.053 6	0.054 3	0.073 7	0.059 0

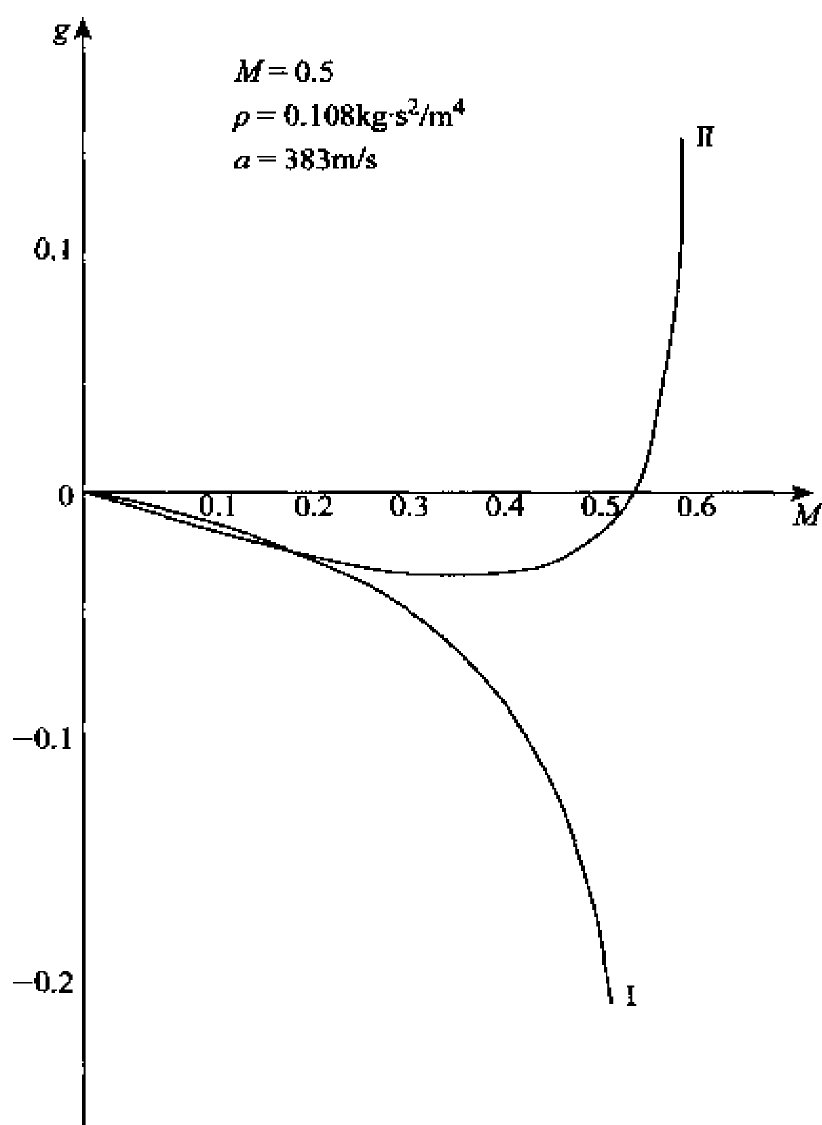


图 5-4 二阶形态组合的 M-g 图(中间结果)

表 5-7 中还列出了按亚音速狭条理论计算得到的颤振特性，其中所谓“修正”值即在计算狭条气动力和力矩时，以修正因子$\sqrt{1-\bar{y}^2}$（其中$\bar{y}=y/l$）使气动力和力矩沿翼展逐渐削弱。

按亚音速核函数方法计算的颤振特性同试验结果（文献[36]）比较，二阶形态组合的颤振马赫数高出 6.1%，三阶形态组合的颤振马赫数高 4.3%。两种组合的颤振频率均高 3.8%。产生误差的原因有三：

(1) 翼尖油箱（或冲压发动机）对翼面气动力的影响。与翼尖固连的油箱（或冲压发动机）似一机身，使得翼尖处的气动力不等于零。在文献[36]中引入当量翼展的概念，即展向特征尺寸由实际的半翼展 $l=0.338$ m 延长到 $l=0.390\ 6$ m，以考虑油箱（或冲压发动机）对翼面气动力的影响。这样，翼尖处的气动力接近真实情况。在我们的计算中，没有考虑油箱对翼面气动力的影响，也就是说把气动力算小了（见图 5-5）。于是，求得的颤振马赫数相应地高一些。

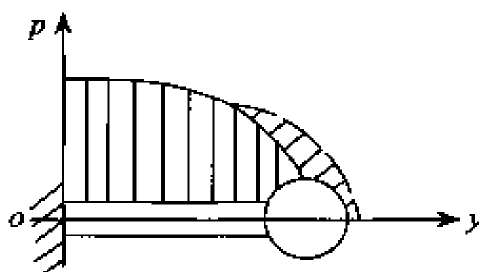


图 5-5　油箱对翼尖气动力的影响

(2) 振型的影响。计算广义气动力时，在半个翼面上选取 99 个数值积分点，各点的固有振型值是根据 9 个结构控制点的固有振型值用拉格朗日插值公式求得的，这样势必带来一定的误差。

(3) 质量的影响。计算广义质量时，将翼面分成 9 小块。由于原始数据的限制，不能增加质量分块的数目。对于此矩形翼，应增加到 20 块以上为宜。

综合以上所述，第一个原因是主要的，第二个原因次之，第三个原因对结果影响不大。

例 2　镁制 60°平板三角翼（图 5-6）。

该翼面的根弦为 215.9 mm，半翼展为 124.7 mm，厚度为 0.86 mm。

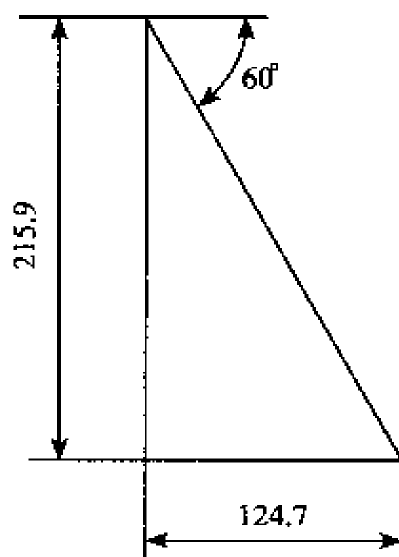


图 5-6　60°平板三角翼

在文献[11]中，列举了用试验方法确定的前三阶振型值。在本书第三章的图 3-9 绘出了该 60°平板三角翼的振型图。

文献[37]对该 60°三角翼在马赫数 0.54，1.30，2.0 以及 3.0 作了风洞颤振试验，取得了颤振试验数据，以便同理论计算结果进行比较。

文献[38]对该 60°三角翼的颤振特性作了理论分析和计算。文献[39]利用不计及厚度的活塞理论给出了计算结果。文献[17]利用亚音速核函数方法（25 个配置点）和亚音速狭条理论给出了该翼面的亚音速颤振特性。

此外，文献[40]用超音速狭条理论，当马赫数为 2.0 和 3.0 时在电子模拟计算机上作了计算。

上述的试验结果、数值计算结果以及模拟计算结果汇总在表 5-8。

表 5-8 的计算结果均低于试验值。以不计及厚度的活塞理论计算结果(文献[39])为例,颤振速度的计算值比试验值在马赫数为 1.3 时,低 17.4%;在马赫数 2.0 时,低 15%;在马赫数 3.0 时,低 6.6%。由此可见,在低超音速区,用活塞理论计算的颤振速度误差在 15%以上,而在马赫数 3.0 时,误差却减小为 6.6%左右。这也证明了活塞理论是高超音速颤振分析的一个有力工具。

表 5-8　60°平板三角翼的颤振特性

M		0.54		1.30		2.0		3.0	
ρ ($kg \cdot s^2/m^4$)		0.121		0.045 8		0.036 8		0.033 1	
颤振特性		U_f	ω_f	U_f	ω_f	U_f	ω_f	U_f	ω_f
结果来源		m/s	r/s	m/s	r/s	m/s	r/s	m/s	r/s
试验值(文献[37])		181	162	391	172	513	170	620	180
文献[38]的结果								562	156
零厚度活塞理论(文献[39])的结果	二阶组合			323	154	445	154	580	154
	三阶组合			323	154	449	154	576	154
亚音速核函数方法		152	143						
亚音速狭条理论[17]		112	140						
模拟结果(文献[40])						400	132	541	130

用亚音速狭条理论对 60°平板三角翼进行颤振分析,就颤振速度而言误差在 30%以上,说明二元气动力理论对三元翼面不太适用,但如果采用一些修正因子,例如以 $\cos\Lambda$(其中 Λ 为机翼前缘后掠角)乘以二元气动力系数考虑后掠影响,用 $\frac{1}{f(A)}$ 乘以气动力阻尼系

数以及用$\frac{1}{[f(A)]^2}$乘以气动力系数考虑展弦比影响（其中 $f(A)=\left\{1+\frac{c}{A}\right\}$，$A$ 为展弦比，c 为常数。在文献[41]中，取 $c=0.8$；对于 60°三角翼，拟取 $c=0.70\sim0.72$ 为宜，可减小与试验值的误差，仍能用它作颤振分析，至少可以给我们提供一个较为保守的结果。

用电子模拟计算机进行颤振分析，颤振速度在马赫数 2.0 时较试验值低 21.8%，在马赫数 3.0 时，低 12.7%。这种差异可通过采用更好的气动力表示法得以缩小。在颤振分析工作中，采用电子模拟计算机，具有重要意义。它给设计人员提出有价值的趋势数据，以建立广阔速度范围的颤振边界。

文献[38]还对该 60°平板三角翼取头三阶振型，分别用活塞理论和准定常理论从马赫数 1.3、2.0 到 3.0 考察了考虑翼面厚度和不计厚度的颤振特性，与试验结果比较，误差在 15%以内。如图 5-7 所示，颤振频率表示为与第一阶固有频率的比值，颤振边界表示为刚

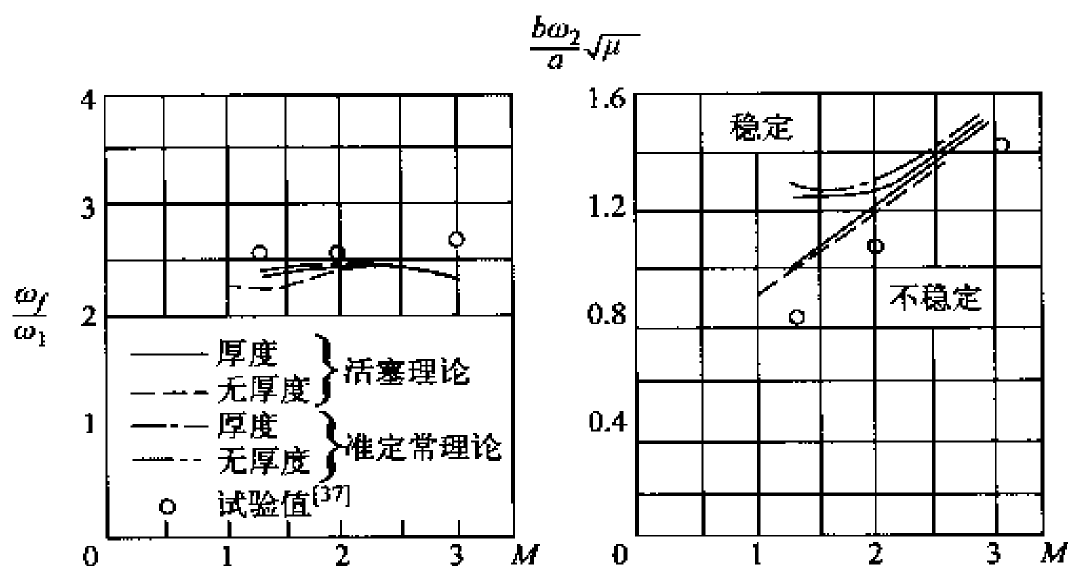


图 5-7　60°平板三角翼的颤振频率比与刚度—高度参数的计算值同试验值的比较

度—高度参数 $\frac{b\omega^2}{a}\sqrt{\mu}$ 与马赫数M的关系，其中b为翼剖面的半弦长，ω_2 为第二阶固有频率，a 为音速，μ 为翼面的质量参数，即 $\mu = \pi\rho\int_0^l b^2 \mathrm{d}y$。

无论是活塞理论，还是准定常理论，计算结果相对于试验值均偏于保守。活塞理论在马赫数 1.3 时，比试验值低 23%；在马赫数 3.0 时，低 9%。准定常理论更为保守，在马赫数 1.3 时，比试验值低 45%；在马赫数 3.0 时，低 12%。

例 3　铝制 70°平板三角翼(图 5-8)。

该平板翼面的根部弦长为 305 mm，半翼展为 111 mm，厚度为 0.813 mm。

在文献[12]中列举了该翼面的前四阶正规化振型，对应的频率分别是 76、165、291 和 383 r/s。同时，给出了马赫数从 0.63 到 3.0 的风洞颤振试验结果。理论计算的颤振结果是利用一次活塞理论(即不考虑厚度)对前三阶(试验确定的)固有振型求得的。

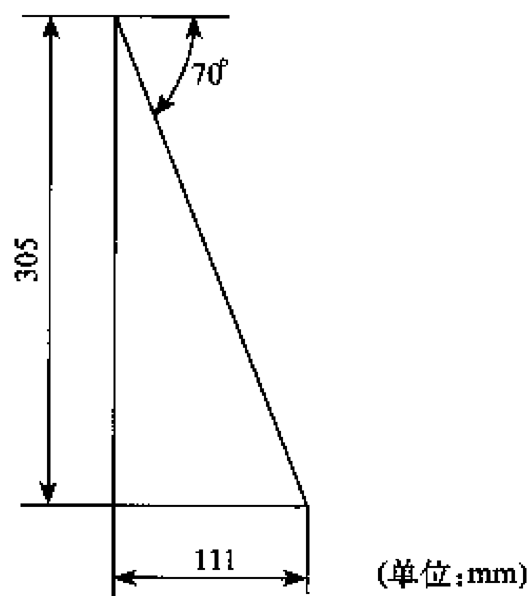


图 5-8　70°平板三角翼

文献[42]、[43]也对该 70°三角翼作了理论分析。

值得指出的是，在文献[12]、[42]、[43]中用颤振动压(q_f)表示颤振条件。

将风洞颤振试验结果和理论计算结果一起列写于表 5-9。其中按零厚度—活塞理论计算的颤振动压取自文献[42]，而颤振频率按文献[12]给出的理论颤振频率与试验颤振频率的比值求得。

表 5-9　70°平板三角翼的颤振特性

颤振特性 / 结果来源 \ M / a (m/s)	0.63		1.01		1.30		2.0		3.0	
	335.8		316.7		298.7		259.1		219.8	
	q_f	ω_f	q_f	ω_f	q_f	ω_f	q_f	ω_f	q_f	ω_f
	kg/m²	r/s	kg/m²	r/s	kg/m²	r/s	kg/m²	r/s	kg/m²	r/s
试验值(文献[12])	1 771	166	2 708	148	3 138	150	4 128	153	8 408	161
零厚度—活塞理论计算结果(文献[42])					3 520	173	5 600	171	8 210	171

用 $\frac{b\omega_2}{a}\sqrt{\mu}$ 表示刚度—高度参数随马赫数的变化曲线示于图5-9。在所研究的情况下，理论颤振频率均大于试验颤振频率。

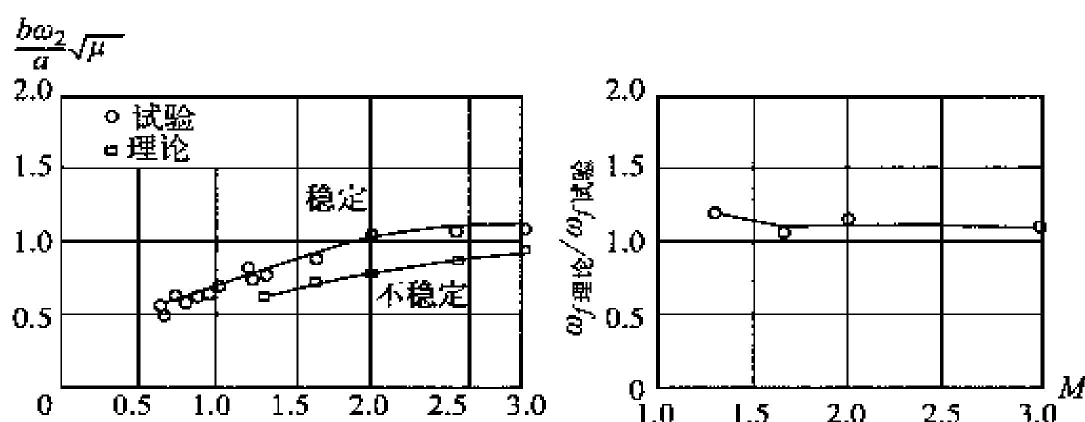


图 5-9　70°平板三角翼的颤振特性

刚度-高度参数只依赖于结构的物理特性（尤其是刚度）和飞行的大气特性，它随高度的增大而增加，或随刚度的加大而增加。在图5-9(1)中，等高度线是呈水平的，等动压线是从图形的原点发出的射线，并按顺时针方向而增加。颤振边界区分为稳定区和不稳定区，曲线的上方为稳定区，曲线的下方为不稳定区。

利用这样的参数，可以建立对设计、研究有价值的趋势曲线。

例 4　全动式舵面（图 5-10）。

假设全部挠度集中在根部支持轴上，舵面作刚体朴振、俯仰以及平移运动。图 5-10 标注了用无因次坐标表示的一阶振型和二阶振型的节线位置，由于全部挠度认为集中在支持轴（位于 $\frac{x_0}{2b}=0.558$ 处，即 40.5%平均气动力弦），因此这些节线是直线。若选取两个广义坐标来描述舵面的运动，则对应于(5-29)式的变形分量为：

$\frac{h_1}{2b}=0.060$　　$\frac{h_2}{2b}=0.232$　　（其中 $b=72.4$ mm）

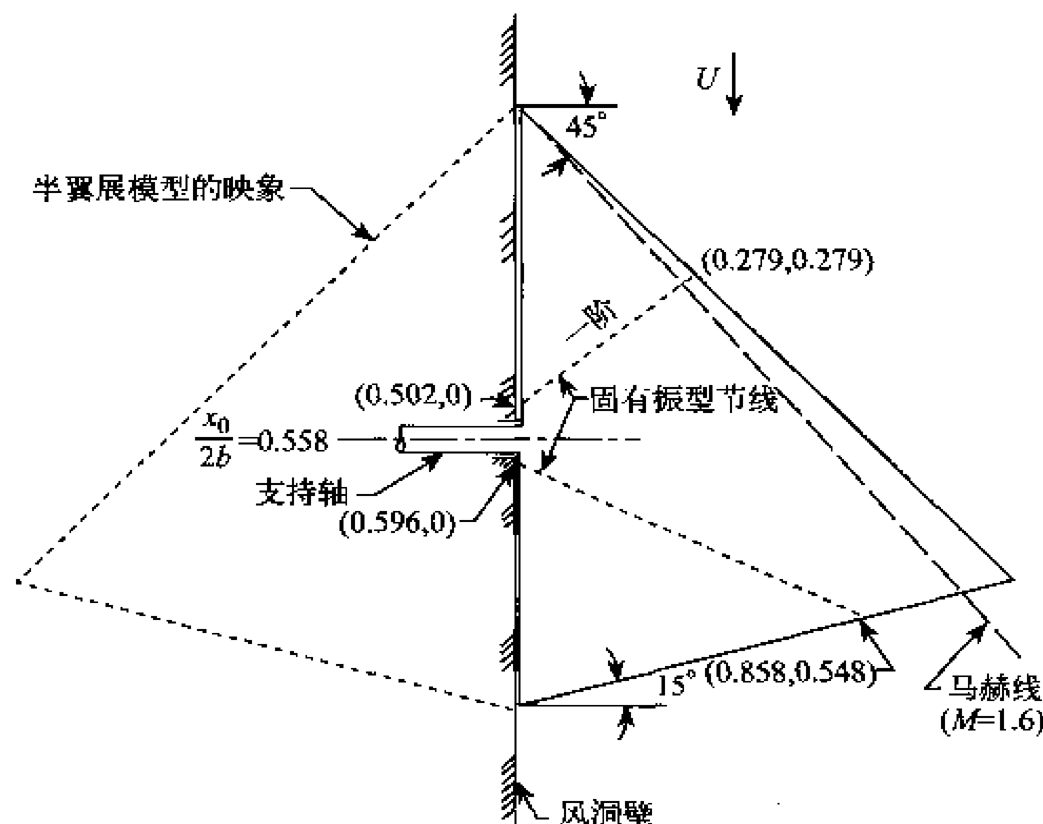


图 5-10 全动式舵面的平面形状和固有振型的节线位置[29]

$a_1 = 1.071 \qquad a_2 = -6.02$

$f_1 = 0.855 \qquad f_2 = 2.77$

当马赫数为 1.6 时,(5-34)式中的半翼展气动力积分表示为:

$$I_1 = 0.10695 - 0.11813k^2 + \mathrm{i}\left(0.3019\frac{1}{k} - 0.1279k\right)$$

$$I_2 = 0.041546 - 0.033206k^2 + \mathrm{i}\left(0.093984\frac{1}{k} - 0.040931k\right)$$

$$I_3 = 0.3019\frac{1}{k^2} - 0.14464 + \mathrm{i}\left(-0.07825\frac{1}{k} + 0.16227k\right)$$

$$I_4 = 0.093984\frac{1}{k^2} - 0.053708 + \mathrm{i}\left(-0.034456\frac{1}{k} + 0.051461k\right)$$

$$I_5 = 0.048896 - 0.035692k^2 + \mathrm{i}\left(0.16435\frac{1}{k} - 0.046946k\right)$$

$$I_6 = 0.016\,912 - 0.004\,583\,7k^2 + \mathrm{i}(0.064\,98\frac{1}{k} - 0.013\,625k)$$

$$I_7 = 0.018\,84 - 0.047\,04k^2 + \mathrm{i}(0.015\,25\frac{1}{k} - 0.040\,04k)$$

$$I_8 = 0.015\,25\frac{1}{k^2} - 0.029\,437 + \mathrm{i}(0.044\,48\frac{1}{k} + 0.052\,77k)$$

$$I_9 = 0.014\,556 - 0.023\,179k^2 + \mathrm{i}(0.028\,24\frac{1}{k} - 0.018\,644k)$$

(5-31) 式的广义气动力系数：

$$A_{11} = -0.228\,41\frac{1}{k^2} + 0.095\,154 + \mathrm{i}(-0.141\,18\frac{1}{k} - 0.118\,43k)$$

$$A_{12} = 1.283\,9\frac{1}{k^2} - 1.034\,99 + \mathrm{i}(-0.669\,61\frac{1}{k} + 1.182\,2k)$$

$$A_{21} = -0.609\,3\frac{1}{k^2} + 0.156\,20 + \mathrm{i}(0.234\,19\frac{1}{k} - 0.053\,134k)$$

$$A_{22} = 3.425\,9\frac{1}{k^2} - 1.285\,7 + \mathrm{i}(-3.981\,6\frac{1}{k} + 0.236\,98k)$$

若用 μ_i 表示广义质量参数，即

$$\mu_i = \frac{M_i}{8\rho b^5}$$

其中广义质量

$$M_1 = 0.000\,117 \quad \mathrm{kg \cdot m \cdot s^2}$$

$$M_2 = 0.001\,34 \quad \mathrm{kg \cdot m \cdot s^2}$$

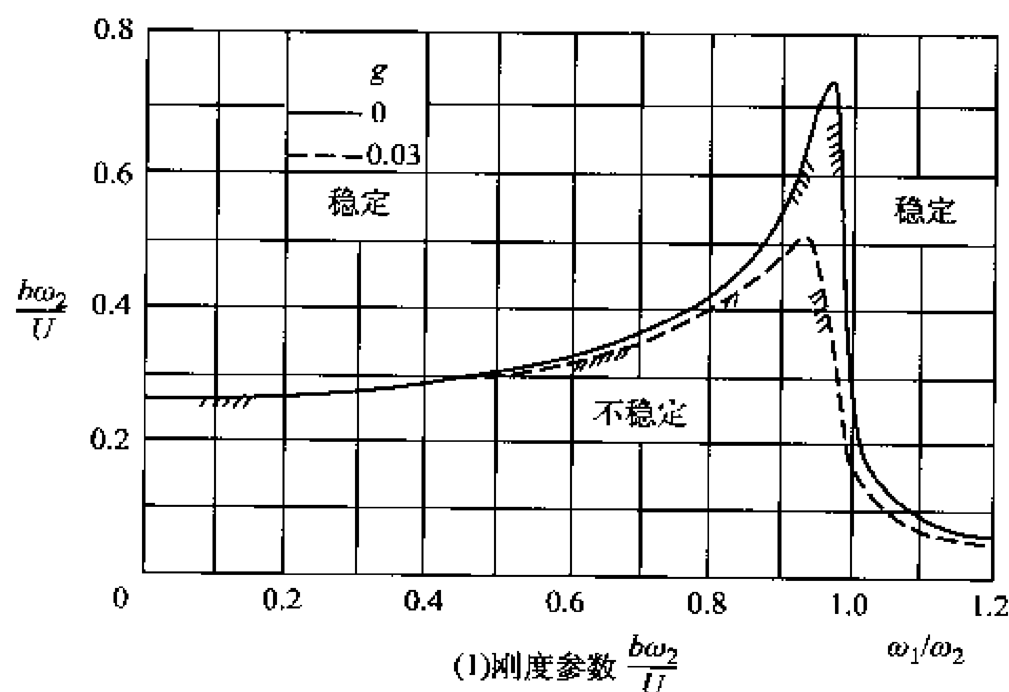
以及空气密度 $\rho = 0.034\,7\ \mathrm{kg \cdot s^2/m^4}$，$b = 0.072\,4\ \mathrm{m}$。

于是 $\mu_1 = 12.04$， $\mu_2 = 254.4$

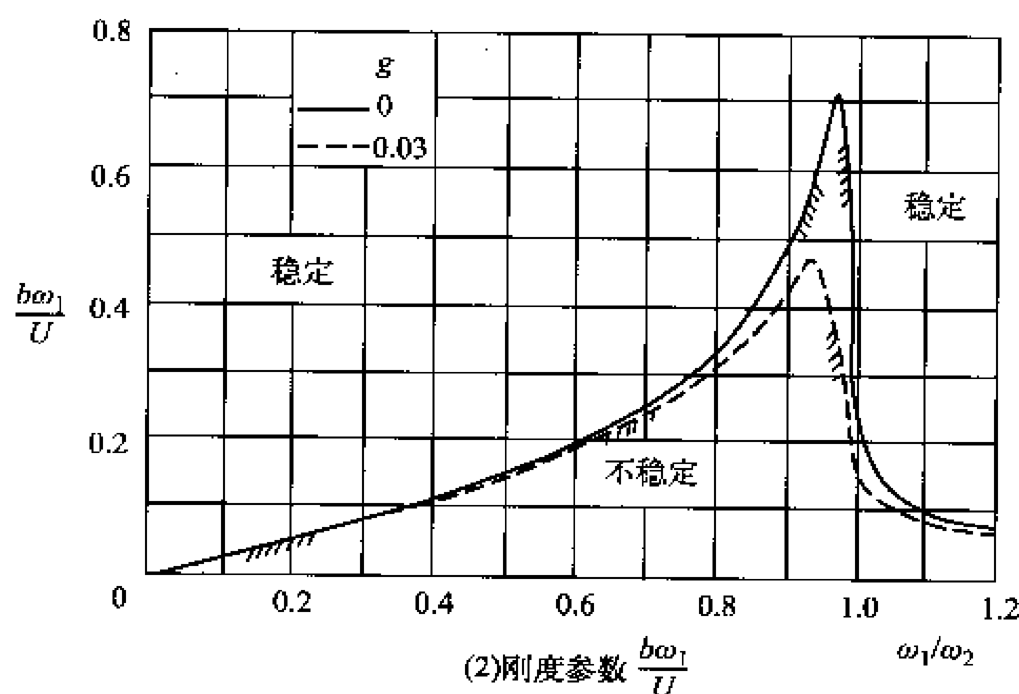
将 μ_i 和 A_{ij} 值代入颤振行列式：

$$\begin{vmatrix} \mu_1\left[1-\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2(1+\mathrm{i}g_1)\right]+A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \mu_2\left[1-\left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2(1+\mathrm{i}g_2)\right]+A_{22} \end{vmatrix} = 0$$

对一组 k 值求解行列式，得到 ω_1/ω 和 ω_2/ω 两个实根。为了简单起见，令 $g_1=g_2=g$。颤振特性作为频率比 ω_1/ω_2 的函数示于图 5-11。图

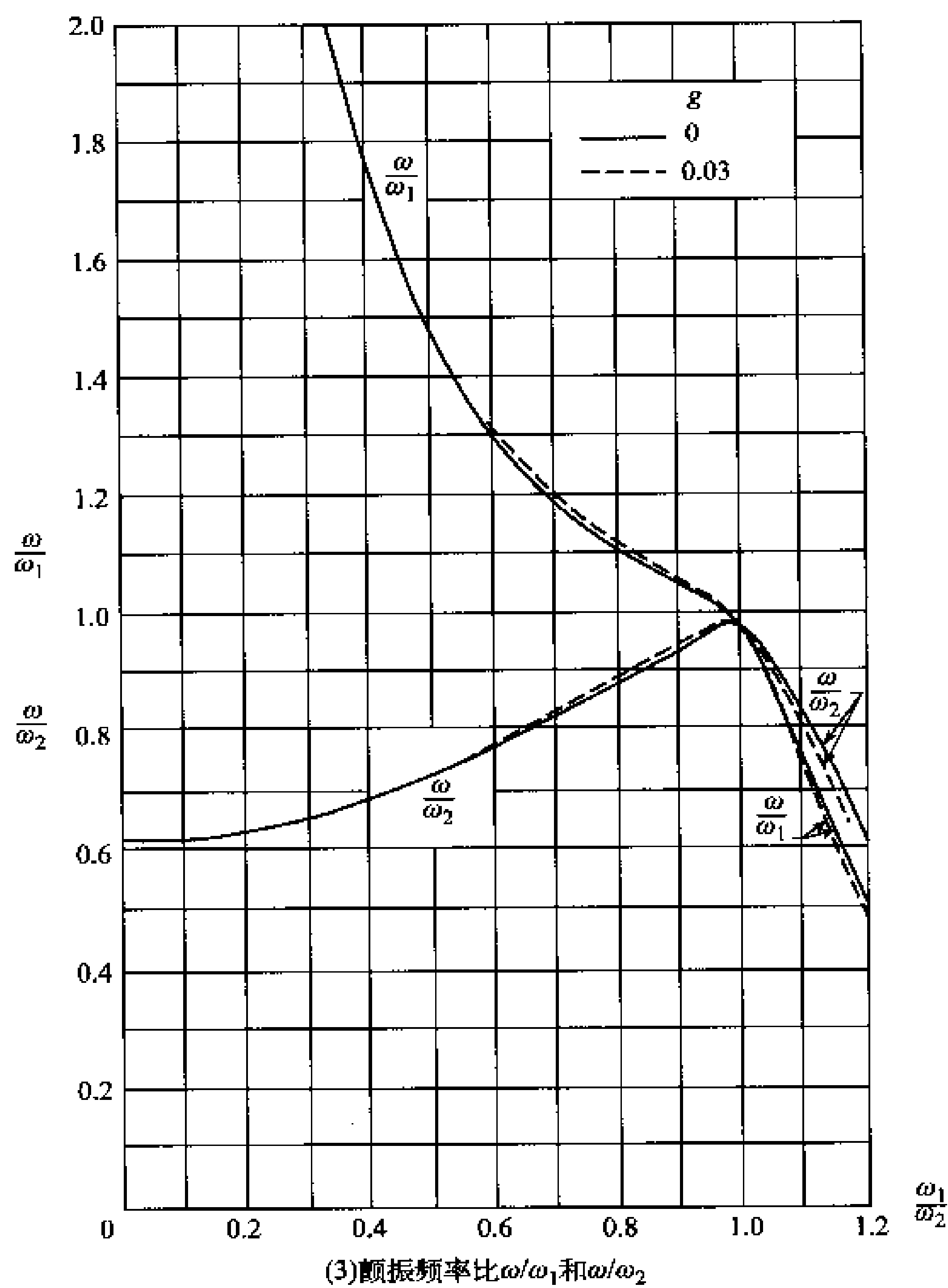


(1)刚度参数 $\frac{b\omega_2}{U}$



(2)刚度参数 $\frac{b\omega_1}{U}$

图 5-11　刚度参数和颤振频率比随 ω_1/ω_2 的变化



(3)颤振频率比ω/ω_1和ω/ω_2

图 5-11 （续）

5-11(1)、(2)分别以刚度参数$b\omega_2/U$和$b\omega_1/U$表示颤振边界，当频率比(ω_1/ω_2)接近于1时，刚度参数出现峰值，其中结构阻尼系数g为零的曲线用实线表示；若g仅增大到0.03(如虚线所示)，则峰值将大大地降低；对于较高的g值，峰值将进一步降低。但当频率比小于0.6或者0.7时，甚至更大的阻尼值也只对刚度参数产生极小的影响。该图(3)给出了$M=1.6$时颤振频率比值ω/ω_1和ω/ω_2随ω_1/ω_2的变化曲线，实线是对$g=0$而言，虚线则表示$g=0.03$。当ω_1/ω_2小于1时，颤振频率ω落在ω_1和ω_2之间；当ω_1/ω_2增大到接近于1.0时，ω接近于ω_1或者ω_2；当ω_1/ω_2超过1.0时，ω低于ω_1或者ω_2。由图可知，结构阻尼对频率的影响是可忽略的。

§3. 参数影响

现在，我们来讨论一些参数对颤振特性的影响。

(1) 振动形态

对于大展弦比机翼的颤振分析，往往提及"弯扭颤振"这一术语。也就是说，颤振主要与头一、二阶振型(即弯曲振型和扭转振型)有关。

高速飞行器常采用大后掠的三角翼或切尖三角翼，且展弦比与1同量级。这种三角翼的翼尖在超音速飞行时，发生独特的朴振运动，它类似于固有振动中的某一高阶振动形态。此时，需包括更多的振型。一般，对于简单的翼面，取头几阶振型即可。

通常，可用两种方法鉴别哪几种振型在颤振当中起了主要作用。一是从颤振振型的观点，在颤振临界速度和颤振频率确定之后，用(5-52)式求出颤振振型，按图形或幅值与颤振计算中所选取的固有振型作比较，若颤振振型接近于第二阶固有振型，则可断定颤振振型主要取决于头一、二阶固有振型，以此类推。另外，从颤振频率的观点，将颤振频率与颤振计算中选取的固有振型的频率比较，当颤振频

率与某一阶固有振型的频率接近，则可断定颤振取决于该固有振型之前的那几阶。

如例 2 中所述的镁制 60°平板三角翼，在 $\rho = 0.0331\ \mathrm{kg \cdot s^2/m^4}$ 和 $M = 3.0$ 时发生颤振，其颤振频率为 $\omega_f = 180$ r/s(试验值)，计算中选取的固有振型的频率分别是 $\omega_1 = 66$ r/s，$\omega_2 = 185$ r/s，$\omega_3 = 336$ r/s，可以看出：颤振频率 ω_f 接近于第二阶固有振型的频率，于是颤振主要取决于头一、二阶固有振型。在文献[40]中，对该 60°三角翼，分别用头两阶固有振型和头三阶固有振型作了颤振分析。在第一种情况下，其中第一阶振型(弯曲振型)占 86%，第二阶振型占 14%；在第二种情况下，第一阶振型占 84%，第二阶振型占 14%，第三阶振型占 2%。说明颤振主要与最低的两阶振型有关。

根据经验表明，在作亚音速颤振分析时，取最低的三阶固有振型即可，其中一、二阶振型是主要的；在作超音速颤振分析时，取最低的四阶固有振型即可，其中最低的一、二阶振型仍很重要。

(2) 质量分布

质量分布的不平衡性对颤振特性影响较大。为了满足翼面的总质量、重心位置、静矩以及惯性矩等动力特性要求，最好将翼面的质量分布按弦向和展向坐标写成函数形式。或者如文献[38]所述，用一组抛物线逼近按展向划分的 n 段质量分布，并在每一段上沿弦向分成 k 个区间。在任一区间 x，单位面积上的质量表示为：

$$m^{(n)}(x) = (m_0^{(n)})_k + (m_1^{(n)})_k x + (m_2^{(n)})_k \cdot x^2$$

通常，把翼面划分为很多小块，让各个小块的质量集中在相应小块面积的中心，最后按公式

$$M_{总} = \sum_{k=1}^{N} m_k$$

$$S_{总} = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot x_k$$

$$I_{xy总} = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot x_k \cdot y_k$$

检查分布质量是否满足动力特性的要求(即使各小块叠加的质量、静矩、惯性积控制在一定的误差范围内)。

在翼尖携带集中质量,如油箱、冲压发动机等,使翼面的颤振特性产生显著的变化。如在一 65°切尖三角翼的翼尖加上机翼总质量的 30%,使得颤振临界速度降低 36.8%,颤振频率降低 53.3%。在后掠机翼上悬挂较大的集中质量,有可能发生纯弯曲颤振。为了改善翼面的颤振特性,在与结构的总体布局不相矛盾的情况下,尽量不在翼尖悬挂过大的集中质量,而将悬挂位置移到靠近翼根。此外,在翼面的适当位置上配置不太大的集中质量,有时能够提高翼面的颤振临界速度。例如,有的高速飞机的全动式尾翼,在翼尖加上数公斤的配重,改善了颤振特性。这样,集中质量使得翼面的重心前移,偏离气动力中心,减小了惯性力的影响,翼面趋于稳定。

(3) 结构阻尼

在作颤振分析时,通常把临界状态视为无阻尼的简谐运动。但是,事实上除了发生颤振的直接区域之外,机翼的运动并非完全是简谐的,由于结构总是存在着阻尼。对于一般的金属材料的翼面,结构阻尼的大小在 0.005～0.05 范围内,它与结构材料、设计以及工艺有关。一般,可由地面振动试验(测量振幅的衰减率)确定它的大小。在分析中引入的结构阻尼力,它在相位上与速度相反,在数值上与弹性恢复力成比例,以此来计及每周振动中机械能量的消耗量。

在求解颤振运动方程式时,我们惯用 M-g 图(或者 U-g 图)作为判别。当根的曲线穿过 M(或 U)轴进入 $g>0$ 的上半平面内时,认为是不稳定的,取与 M(或 U)轴的交点(此时 $g=0$)为临界点,即为所求的解。当根的曲线处于 M(或 U)轴的下方时,视为稳定的。如上所述,由于结构阻尼系数具有 0.005～0.05 的正值,当结构达到 $g=0$ 时,试验证实,往往维持大幅度的等幅振动,并不一定会立即

破坏。

对于大多数小展弦比翼面，颤振时的减缩频率 $k_f\left(=\frac{\omega_f c_r}{U_f}\right)$约为1或者在亚音速时大于1。在文献[43]中，对一70°平板三角翼作了两阶形态的颤振分析。当结构阻尼不大于0.03时，它通过参数 g/k 对颤振动压和颤振频率的影响不超过5%。在高马赫数下，由于高速气流所致，颤振时的减缩频率远小于1。对此70°三角翼而言，要求其颤振频率改变 $\epsilon g/k$ 的量级，当 ϵ 为0.2时，一直到马赫数 $M=9$，只引起小于5%的影响。与此类似的机翼结构表明，结构阻尼对颤振动压和颤振频率仅产生相当小的影响。

(4) 翼型厚度

近代飞行器为了满足飞行性能的要求，除了广泛采用大后掠角的小展弦比三角翼之外，还尽量地减小了翼型的相对厚度，如达到4%左右。在亚音速和低超音速范围内，这样小的相对厚度对颤振特性影响甚小，一般忽略不计，气动力可按线性理论计算，即以中面代替翼面。但是，当飞行马赫数增高时，厚度效应必须予以考虑。已有的资料表明，M 达到3.0附近时，厚度使得颤振速度和颤振频率降低10%～15%左右。

我们试图从气动力的观点来解释厚度效应。如图5-12所示（见文献[44]），在超音速时，厚度的增加导致压力中心（C.P.）前移，有可能使得压力中心接近翼型的重心，从而降低翼面的稳定性。

我们以一中等展弦比的平直尖削机翼为例（文献[45]）。从图5-13可见，在高马赫数时，二元线性理论的结果与零厚度的活塞理论结果是接近的，但与考虑厚度的活塞理论结果偏离较大。此时，即使在 M 小于2时，试验值与考虑厚度的活塞理论结果是一致的。

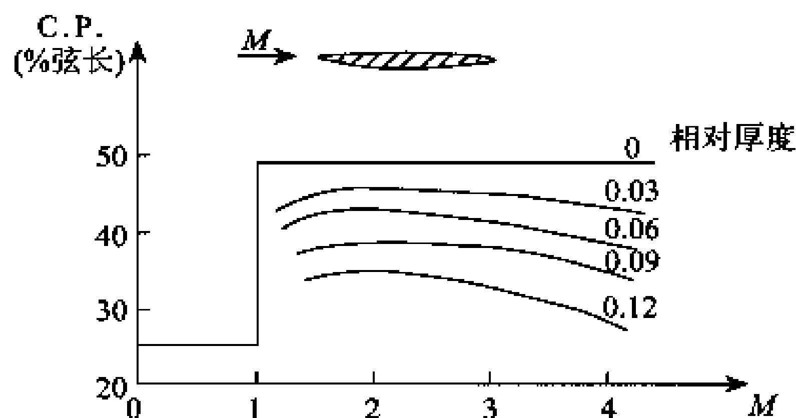


图 5-12 翼型的厚度效应

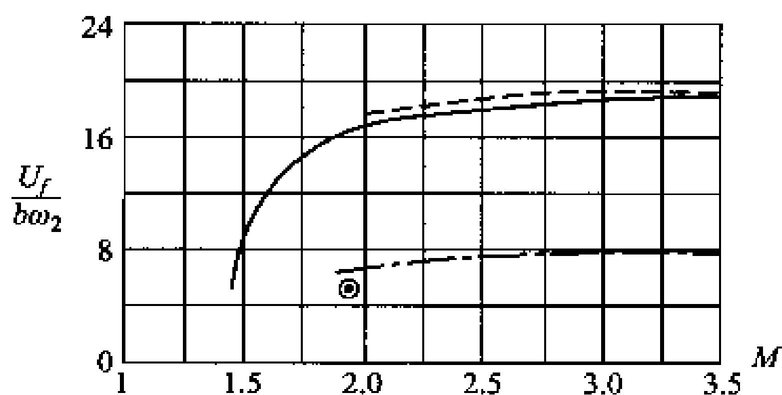


图 5-13 平直尖削机翼的颤振特性

(5) 平面形状

后掠角

从气动力的观点来分析，后掠角等于降低了来流速度，通常用后掠角的余弦乘以非后掠翼的气动力系数，由于 $\cos\Lambda<1$，于是考虑后掠效应使得气动力系数减小。为使气流对结构作的功大于结构对气流作的功，需提高飞行速度。

在文献[41]中，对后掠角 0°～60°的非尖削机翼（保持展弦比不变）作了试验研究。图 5-14 的曲线表明，随着后掠角的增加，颤振临界速度是提高的，但颤振频率几乎没有变化。

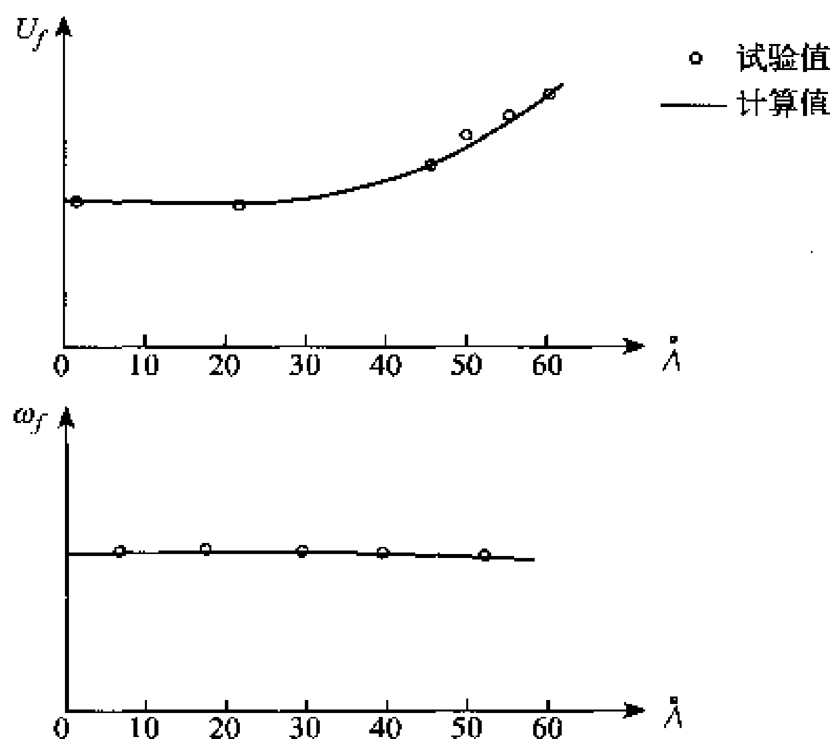


图 5-14 U_f，ω_f 随后掠角的变化

展弦比

应从结构和气动力两个方面来分析展弦比的影响。

首先，小展弦比翼面相对于大展弦比机翼具有较大的结构刚度，翼尖处的挠度减小，于是颤振特性有显著的改善。从气动力的观点来看，大展弦比机翼可按二元情况处理，而对于小展弦比翼面，气动力随着展向位置变化，在翼尖处，升力削减为零。此时，必须计及有限翼展的影响。

以展弦比为 2 的矩形翼作朴振振动（$M=0$）时，按二元和三元理论计算的剖面升力系数为例（文献[47]），沿展向分布的升力曲线如

图 5-15 所示。二元和三元的总升力系数值列于表 5-10。

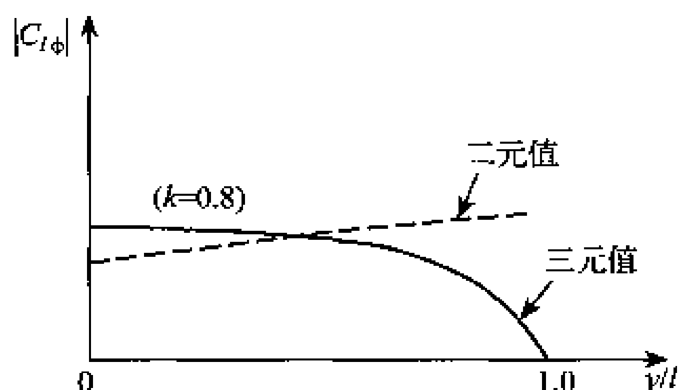


图 5-15　展弦比为 2 的矩形翼作朴振($M=0$)时的升力分布

表 5-10　展弦比为 2 的矩形翼作朴振($M=0$)时的总升力系数值

k	$\lvert C_{L,\Phi}\rvert_{三元}$	$\lvert C_{L,\Phi}\rvert_{二元}$
0.22	0.312	0.631
0.60	0.976	1.443
0.80	1.453	1.992

表中按 $|C_{L,\Phi}|=\sqrt{[(C_{L,\Phi})_R]^2+[(C_{L,\Phi})_I]^2}$ 计算。

随着展弦比的减小，颤振速度按展弦比的倒数而增加，颤振频率仍接近于不变(图 5-16)。

由镁制 60°平板三角翼在亚音速范围内求得的颤振特性(列于表 5-8)：按亚音速核函数方法(25 个下洗配置点)计算的颤振临界速度为 152 m/s，颤振频率为 143 r/s；按亚音速狭条理论(未修正)计算的颤振临界速度为 112 m/s，颤振频率为 140 r/s。也可看出有限翼展对颤振特性的影响。

尖削比

在结构设计时，为了提高翼面的结构刚度，往往沿气流方向切去

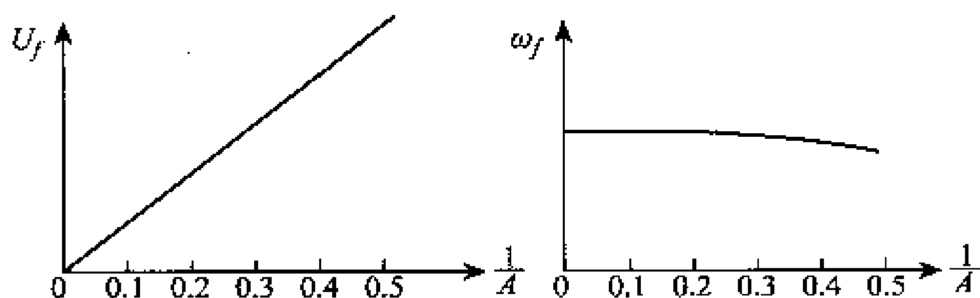
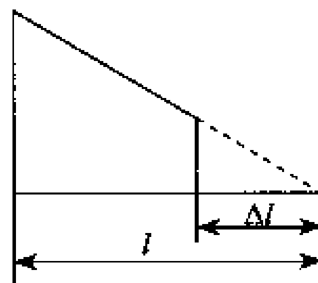


图 5-16　颤振参数随展弦比倒数的变化[41]

一部分翼尖。关于切尖三角翼平板的固有振动频率的变化如表5-11所示。

表 5-11　切尖三角翼的频率变化[48]

$\Delta l/l$ \ ω_i	ω_1 rad/s	ω_2 rad/s	ω_3 rad/s	ω_4 rad/s
0.20	242	613	1 156	1 330
0.25	263	625	1 170	1 480
0.30	304	650	1 190	1 670



由表中所列数据可以看出，随着 $\Delta l/l$ 的增加，固有振动频率相应地增加。

切尖三角翼对颤振的发生极为敏感，可解释为翼尖影响区增加的缘故(文献[12])。

(6) 飞行高度

随着飞行高度的增加，大气参数引起显著的变化，如空气密度急剧降低，音速也降低。为了达到颤振发生时的动压，须提高颤振临界速度，但此时颤振频率几乎保持不变。这里，以一65°切尖三角翼的颤振特性为例，颤振临界马赫数和颤振频率随高度的变化

曲线如图5-17所示。

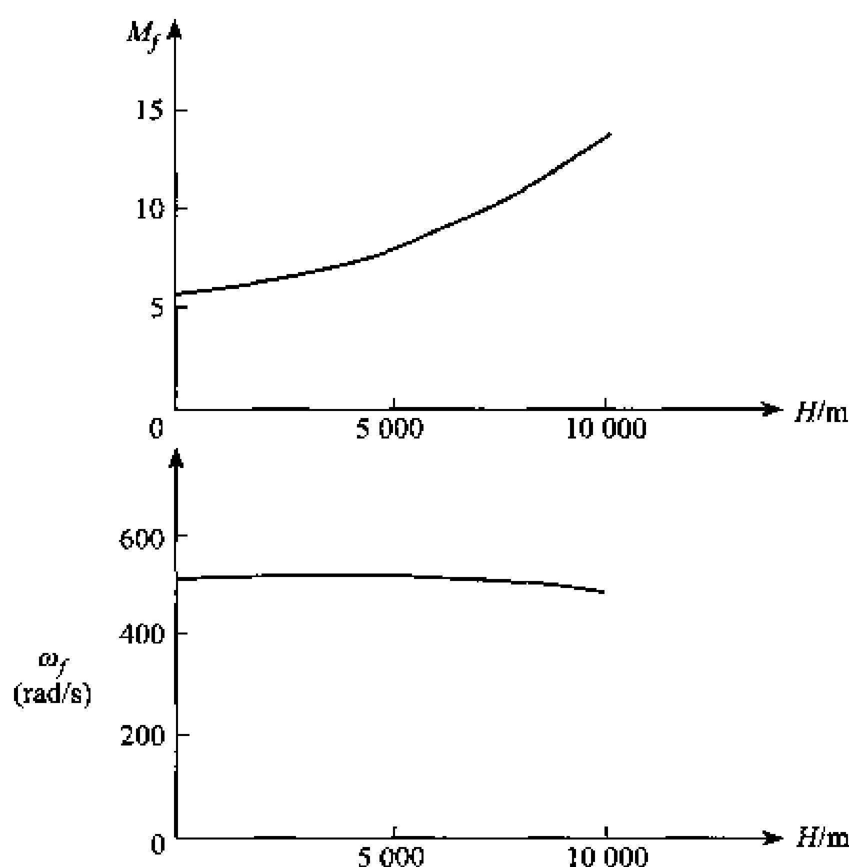


图 5-17　65°切尖三角翼的颤振特性随高度的变化

(7)空气压缩性

当马赫数达到 0.7 以后，空气压缩性引起气动力的增加。例如，展弦比为 2 的 45°后掠翼[17]作平移运动和俯仰运动(绕 50%根弦)，$M=0.8, k=0.4$ 时的气动力系数比 $M=0, k=0.4$ 的气动力系数均大 10%～30%。可以认为，考虑空气压缩性的影响使得颤振临界速度降低。

空气压缩性影响随着展弦比的减小而降低。对于大展弦比机翼和中等展弦比机翼，空气压缩性的影响约为 30%～40%的数量级，而对于小展弦比三角翼，空气压缩性的影响约为 5%～15%的数量级。

第六章　组合体颤振

作为支撑机翼、尾翼、舵面的机身(或弹身)，在飞行中由于弯曲变形和平移、俯仰以及滚转等刚体运动，与机翼、尾翼、舵面的振动耦合，产生一些组合型颤振现象。在这一章里，我们就翼-身组合体、身-舵组合体作为考察对象，分别给出它们的颤振运动方程式，并列举适当的例子作为说明。

§1. 翼-身组合体

1. 对于细长弹翼和弹身的导弹，弹身具有圆形剖面，该组合体在垂直于弹翼的对称平面内产生变形，如图 6-1 所示。

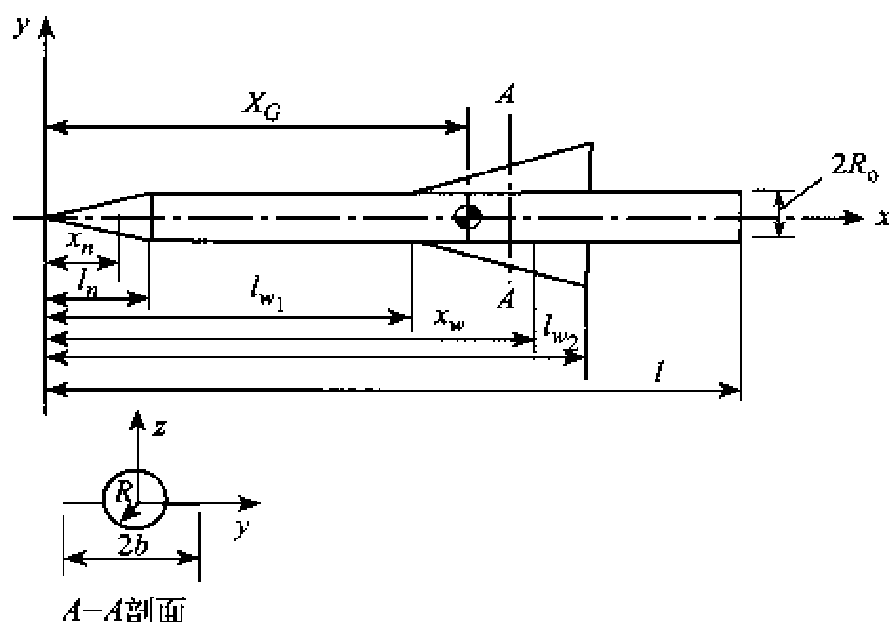


图 6-1　翼-身组合体

包括刚体平移和俯仰在内的 n 个自由度，沿弹体中心线的 z 向位移为：

$$H(x,t)=\sum_{i=1}^{n}h_i(x)q_i(t) \tag{6-1}$$

式中，$h_i(x)$为振型函数，$q_i(t)$为广义坐标。

根据细长体理论，广义气动力表示为

$$Q_i=-\pi\rho U^2R_0\sum_{j=1}^{n}[b_{ij}(R_0/U)^2\ddot{q}_j+C_{ij}(R_0/U)\dot{q}_j+d_{ij}q_j] \tag{6-2}$$

作用在单位长度上的 z 向压力差：

$$\Delta p(x,t)=-\pi\rho\left(U\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[B(x)\left(U\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial t}\right)\right] \tag{6-3}$$

其中
$$B(x)=b^2-R^2+R^4/b^2 \tag{6-4}$$

对于无翼部分，$b=R$，于是 $B(x)=R^2$。

广义气动力的表达式(6-2)中的广义气动力系数：

$$b_{ij}=(1/R_0)^3\int_0^l h_i(x)h_j(x)B(x)\mathrm{d}x$$

$$c_{ij}=(1/R_0)^2\left\{R_0^2+h_i(l_{w_2})h_j(l_{w_2})[B(l_{w_2})-R_0^2]+\int_0^l\left(h_i\frac{\partial h_j}{\partial x}-\frac{\partial h_i}{\partial x}h_j\right)B(x)\mathrm{d}x\right\}$$

$$d_{ij}=(1/R_0)\left\{\frac{\partial h_i(l)}{\partial x}R_0^2+h_i(l_{w_2})\frac{\partial h_j(l_{w_2})}{\partial x}[R(l_{w_2})-R_0^2]-\int_0^l\frac{\partial h_i(x)}{\partial x}\frac{\partial h_j(x)}{\partial x}B(x)\mathrm{d}x\right\} \tag{6-5}$$

将广义气动力代入颤振运动方程式，则得

$$\sum_{j=1}^{n}[\bar{b}_{ij}(R_0/U)^2\ddot{q}_j+c_{ij}(R_0/U)\dot{q}_j+\bar{d}_{ij}q_j]=0$$
$$(i=1,2,\cdots,n) \tag{6-6}$$

由于分析当中选取正交振型，(6-6)式的系数为

$$
\left.\begin{aligned}
\bar{b}_{ii} &= (M_i/\pi\rho R_0^3) + b_{ii} \\
\bar{b}_{ij} &= b_{ij} \quad (i \neq j) \\
\bar{d}_{ii} &= (M_i/\pi\rho R_0^3)(R_0\omega_i/U)^2 + d_{ii} \\
\bar{d}_{ij} &= d_{ij} \quad (i \neq j)
\end{aligned}\right\} \tag{6-7}
$$

其中，M_i 为广义质量，且

$$
M_i = \int_0^l m(x) h_i^2(x) \mathrm{d}x \tag{6-8}
$$

假设考察三种运动形态：

(1) 组合体作刚体平移　$h_1(x) q_1(t)$

其中，$h_1(x)=1$，$\omega_1=0$，q_1 就是重心处的位移。

(2) 组合体作俯仰运动　$h_2(x) q_2(t)$

其中，$h_2(x)=\frac{1}{l}(x_G-x)$，$\omega_2=0$，$q_2$ 就是绕重心的俯仰角。

(3) 组合体的第一阶弯曲振动　$h_3(x) q_3(t)$

其中，$h_3(x)$为第一阶弯曲振型，令 $h_3(l)=1$，可按理论方法计算或由地面共振试验确定。弹翼作为固定在弹身上的刚体，此时在弹翼上：

$h_3(x)=h_3(l_w)$，ω_3 就是弹体的第一阶弯曲振动频率。

下面按第五章讲述的求解方法确定(6-6)式的根。

文献[49]采用根轨迹法判断细长翼-身组合体的气动弹性不稳定问题(包括动不稳定和静不稳定等)。

值得指出的是，分析中用到的细长体气动力理论，适用于翼-身组合体很细长的情况，或者翼-身组合体不很细长而马赫数近于 1 的情况。当马赫数较高时，细长体气动力理论就不适用了。

2. 现在，我们用活塞理论计算翼面的气动力，弹身的头部气动力用牛顿流理论计算，其他翼-身部分的气动力则略去不计，但考虑了身对翼的干扰。

按照活塞理论的二次式：

$$
P - P_\infty = \rho a^2 \left[\frac{w}{a} + \frac{\gamma+1}{4}\left(\frac{w}{a}\right)^2 \right]
$$

写成压力系数的形式：

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 2\left(\frac{w}{U}\right)^2\left[\frac{1}{M(w/U)} + \frac{\gamma+1}{4}\right] \tag{6-9}$$

设 $\beta=\sqrt{M^2-1}$，则

$$C_p = 2\left[\frac{1}{\beta}\,\frac{w}{U} + \frac{\gamma+1}{4}\left(\frac{w}{U}\right)^2\right] \tag{6-10}$$

设翼面的厚度为零，则它的下洗角为：

$$\frac{w}{U} = \pm\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{U}\,\frac{\partial H}{\partial t}\right) \tag{6-11}$$

对于上翼面取正号，下翼面取负号。

于是

$$C_p = \pm(2/\beta)\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{U}\,\frac{\partial H}{\partial t}\right) \tag{6-12}$$

考虑身对翼的干扰，等于翼面的洗流增加 $\left(\frac{R_0}{y}\right)^2$ 倍[50]，则

$$C_p = \pm(2/\beta)\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{U}\,\frac{\partial H}{\partial t}\right)\left[1 + (R_0/y)^2\right]$$

单度弦长上的 z 向压差为：

$$\begin{aligned}\Delta p &= 2\int_{R_0}^{b}\left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)\left[C_{p_u} - C_{p_L}\right]\mathrm{d}y \\ &= -(4/\beta)\rho U^2\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{U}\,\frac{\partial H}{\partial t}\right)(b - R_0^2/b)\end{aligned} \tag{6-13}$$

由翼面产生的广义气动力系数表示为

$$\left.\begin{aligned}(b_{ij})_w &= 0 \\ (c_{ij})_w &= (4/\pi\beta)\,(1/R_0)^2\int_{l_{w_1}}^{l_{w_2}}(b - R_0^2/b)h_i h_j\,\mathrm{d}x \\ (d_{ij})_w &= (4/\pi\beta)\,(1/R_0)^2\int_{l_{w_1}}^{l_{w_2}}(b - R_0^2/b)h_i h_j'\,\mathrm{d}x\end{aligned}\right\} \tag{6-14}$$

此外，

$$(d_{i1})_w = 0$$

$$(c_{i1})_w = \frac{(d_{i2})_w}{R_0 \dfrac{\partial h_2}{\partial x}}$$

设弹身头部圆锥体的半顶角为 θ（图 6-2），在 $M\theta > 1$ 的条件下，按牛顿流理论确定作用在圆锥体上的气动力[51]。

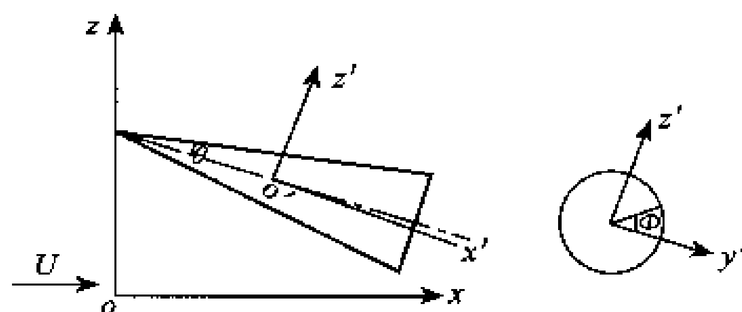


图 6-2　头部坐标系

略去下洗角中的 $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial H}{\partial t}$ 二次以上的项，压力系数为：

$$C_p = 2\left[\sin\theta + \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{U}\ \frac{\partial H}{\partial t}\right)\sin 2\theta \cdot \sin\Phi\right] \tag{6-15}$$

圆锥上单位面积的 z 向气动力

$$\mathrm{d}p = -\left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)C_p R\,\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{d}x\sin\Phi \tag{6-16}$$

则单位长度上的 z 向气动力为

$$\begin{aligned}\Delta p(x,t) &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ &= -\pi\rho U^2 R\sin 2\theta\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{U}\ \frac{\partial H}{\partial t}\right)\end{aligned} \tag{6-17}$$

由弹身头部产生的广义气动力系数为：

$$
\left.\begin{aligned}
(b_{ij})_n &= 0 \\
(c_{ij})_n &= (1/R_0)^2 \sin 2\theta \int_0^{l_n} R h_i h_j \,\mathrm{d}x \\
(d_{ij})_n &= (1/R_0)^2 \sin 2\theta \int_0^{l_n} R h_i \frac{\partial h_j}{\partial x} \mathrm{d}x
\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}18)
$$

此外，还有

$$
(d_{i1})_n = 0
$$

$$
(c_{i1})_n = (d_{i2})_n / R_0 \frac{\partial h_2}{\partial x}。
$$

略去弹身的作用，广义气动力系数表示为：

$$
\left.\begin{aligned}
b_{ij} &= (b_{ij})_w + (b_{ij})_n = 0 \\
c_{ij} &= (c_{ij})_w + (c_{ij})_n \\
d_{ij} &= (d_{ij})_w + (d_{ij})_n
\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}19)
$$

以及

$$
d_{i1} = 0
$$

$$
c_{i1} = d_{i2} / R_0 \frac{\partial h_2}{\partial x}
$$

将广义气动力系数代入颤振运动方程式，便可求解翼-身组合体的颤振问题。

§2. 身-舵组合体

1. 弹身按第一阶弯曲振型作弹性振动，舵面以俯仰和朴振形式作刚体振动（图 6-3）。

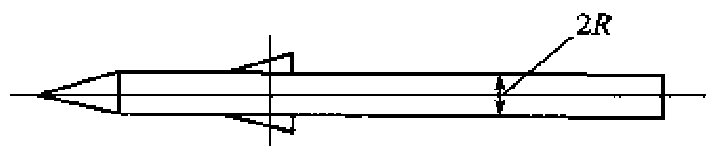


图 6-3　身-鸭式舵组合体

选取三个广义坐标 q_1、q_2、q_3 表示弹身和舵面的位移函数：

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{弹身的弯曲} & H(x,t) = h(x)q_1 \\
\text{舵面的俯仰} & \alpha(x,y,t) = \alpha_1 q_2 + \alpha_2 q_2 \\
\text{舵面的朴振} & f(x,y,t) = f_1 q_2 + f_2 q_3
\end{array}\right\} \tag{6-20}
$$

将系统的坐标原点置于舵面转轴上，舵面的位移函数表示为：

$$
\begin{aligned}
H_i(x,y,t) &= \left[\frac{\partial h_1}{\partial x}q_1 + (\alpha_1 q_2 + \alpha_2 q_3)\right]x + (f_1 q_2 + f_2 q_3)y^* \\
&= \frac{\partial h_1}{\partial x}xq_1 + (\alpha_1 x + f_1 y^*)q_2 + (\alpha_2 x + f_2 y^*)q_3
\end{aligned} \tag{6-21}
$$

其中，$y^* = y - R_0$。以后为书写简便起见，将右上角的"＊"去掉。

舵面（考虑弹身的弹性影响）的动能为：

$$
T_{\text{舵(身)}} = \frac{1}{2}\iint_s m(x,y)[\dot{H}_i(x,y,t)]^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6-22}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
2T_{\text{舵(身)}} = &\iint_s m(x,y)\left[\frac{\partial h_1}{\partial x}\dot{q}_1 + \alpha_1\dot{q}_2 + \alpha_2\dot{q}_3\right]^2 x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \\
&\iint_s m(x,y)[f_1\dot{q}_2 + f_2\dot{q}_3]^2 (y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \\
&2\iint_s m(x,y)\left[\frac{\partial h_1}{\partial x}\dot{q}_1 + (\alpha_1\dot{q}_2 + \alpha_2\dot{q}_3)\right]\cdot \\
&(f_1\dot{q}_2 + f_2\dot{q}_3)xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{6-23}
$$

令

$$
\left.\begin{aligned}
I_x &= \iint_s m(x,y)\ (y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
I_y &= \iint_s m(x,y)\ x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
I_{xy} &= \iint_s m(x,y)\ x(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}\right\} \tag{6-24}
$$

以及

$$
\left.\begin{aligned}
A_1 &= I_y\left[\frac{\partial h_1}{\partial x}\right]^2 \\
A_2 &= I_y\alpha_1^2 + I_x f_1^2 + 2I_{xy}\alpha_1 f_1 \\
A_3 &= I_y\alpha_2^2 + I_x f_2^2 + 2I_{xy}\alpha_2 f_2 \\
A_4 &= 2\frac{\partial h_1}{\partial x}(I_y\alpha_1 + I_{xy} f_1) \\
A_5 &= 2\frac{\partial h_1}{\partial x}(I_y\alpha_2 + I_{xy} f_2) \\
A_6 &= 2(I_y\alpha_1\alpha_2 + I_x f_1 f_2) + \\
&\quad 2I_{xy}(\alpha_2 f_1 + \alpha_1 f_2) = 0 \quad (i \neq j)
\end{aligned}\right\} \tag{6-25}
$$

则 $$2T_{舵(身)} = A_1\dot{q}_1^2 + A_2\dot{q}_2^2 + A_3\dot{q}_3^2 + A_4\dot{q}_1\dot{q}_2 + A_5\dot{q}_1\dot{q}_3 \tag{6-26}$$

弹身的位移函数：

$$H_j(x,t) = h_1(x)q_1(t) \tag{6-27}$$

其动能表示为

$$T_{身} = \int_0^l m_B(x)[H_j(x,t)]^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a_{11}\dot{q}_1^2 \tag{6-28}$$

式中，$m_B(x)$为弹身的质量分布。

$$a_{11} = \int_0^l m_B(x)h_1^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} m_B(x)h_1^2(x)\Delta x \tag{6-29}$$

于是，身-舵组合体的动能：

$$
\begin{aligned}
T = (A_1 + \frac{1}{2}a_{11})\dot{q}_1^2 + A_2\dot{q}_2^2 + a_3\dot{q}_3^2 + \\
A_4\dot{q}_1\dot{q}_2 + A_5\dot{q}_1\dot{q}_3
\end{aligned} \tag{6-30}
$$

现在，我们列写舵面和弹身的位能。

$$U_{舵} = \frac{1}{2}k_{\alpha}(\alpha_1 q_2 + \alpha_2 q_3)^2 + \frac{1}{2}k_f(f_1 q_2 + f_2 q_3)^2 \tag{6-31}$$

其中，k_{α} 为舵面俯仰刚度系数(即产生单位俯仰角所需要的俯仰力矩)，k_f 为舵面的朴振刚度系数(即产生单位朴振角所需要的朴振力矩)。

于是

$$2U_{舵} = q_2^2(k_{\alpha}\alpha_1^2 + k_f f_1^2) + q_3^2(k_{\alpha}\alpha_2^2 + k_f f_2^2) \tag{6-32}$$

其中

$$k_{\alpha}\alpha_1\alpha_2 + k_f f_1 f_2 = 0$$

而

$$U_{身} = \frac{1}{2}\int_0^l \mathrm{EI}\left[\frac{\partial^2 H_j(x,t)}{\partial x^2}\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}c_{11}q_1^2 \tag{6-33}$$

式中

$$c_{11} = \int_0^l \mathrm{EI}\left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \omega_1^2 a_{11} \tag{6-34}$$

ω_1 为弹身的一阶弯曲振动频率。

身-舵组合体的位能为：

$$U = 2U_{舵} + U_{身} = \frac{1}{2}c_{11}q_1^2 + (k_{\alpha}\alpha_1^2 + k_f f_1^2)q_2^2 + 2(k_{\alpha}\alpha_1\alpha_2 + k_f f_1 f_2)q_2 q_3 + (k_{\alpha}\alpha_2^2 + k_f f_2^2)q_3^2 \tag{6-35}$$

令

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2}c_{11} \\ B_2 &= k_{\alpha}\alpha_1^2 + k_f f_1^2 \\ B_3 &= 2(k_{\alpha}\alpha_1\alpha_2 + k_f f_1 f_2) = 0 \\ B_4 &= k_{\alpha}\alpha_2^2 + k_f f_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{6-36}$$

则

$$U = B_1 q_1^2 + B_2 q_2^2 + B_4 q_3^2 \tag{6-37}$$

若不考虑弹身的气动力，仅考虑舵面产生的气动力，采用一次活塞理论，广义气动力表示为(对一个舵面而言)：

$$Q_i = -2\rho a \sum_{j=1}^{n} [b_{ij} U \cdot q_j(t) + d_{ij} \dot{q}_j(t)]$$

$$(i, j = 1, 2, 3) \tag{6-38}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} b_{ij} &= \iint_s h_i \frac{\partial h_j}{\partial x} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ d_{ij} &= \iint_s h_i h_j \mathrm{d}x \mathrm{d}y \end{aligned}\right\} \tag{6-39}$$

无论是"×"型还是"+"型舵面，均可按两个舵面来处理，则

$$\begin{aligned} Q_1 &= -4\rho a[(b_{11}Uq_1 + d_{11}\dot{q}_1) + (b_{12}Uq_2 + d_{12}\dot{q}_2) + \\ &\quad (b_{13}Uq_3 + d_{13}\dot{q}_3)] \\ Q_2 &= -4\rho a[(b_{21}Uq_1 + d_{12}\dot{q}_1) + (b_{22}Uq_2 + d_{22}\dot{q}_2) + \\ &\quad (b_{23}Uq_3 + d_{23}\dot{q}_3)] \\ Q_3 &= -4\rho a[(b_{31}Uq_1 + d_{31}\dot{q}_1) + (b_{32}Uq_2 + d_{32}\dot{q}_2) + \\ &\quad (b_{33}Uq_3 + d_{33}\dot{q}_3)] \end{aligned} \tag{6-40}$$

由舵面的位移函数表达式(6-21)，知

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{\partial h_1}{\partial x} x \\ h_2 &= \alpha_1 x + f_1(y) \\ h_3 &= \alpha_2 x + f_2(y) \end{aligned}\right\} \tag{6-41}$$

以及 $$\frac{\partial h_2}{\partial x} = \alpha_1, \quad \frac{\partial h_3}{\partial x} = \alpha_2 \tag{6-42}$$

将舵面的振型及其斜率代入(6-39)式,则得

$$b_{11} = \left[\frac{\partial h_1}{\partial x}\right]^2 \iint_s x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left[\frac{\partial h_1}{\partial x}\right]^2 K_y$$

其中 $K_y = \iint_s x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{s_y}{m(x,y)}$

$m(x,y)$ 为舵面单位面积的质量,可令它为常数;s_y 为静矩。

$$b_{12} = \alpha_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} K_y$$

$$b_{13} = \alpha_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} K_y$$

$$b_{21} = \alpha_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} K_y + f_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} K_x$$

其中 $K_x = \iint_s (y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{s_x}{m(x,y)}$

$$b_{22} = \alpha_1^2 K_y + \alpha_1 f_1 K_x$$

$$b_{23} = \alpha_1 \alpha_2 K_y + f_1 \alpha_2 K_x$$

$$b_{31} = \alpha_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} K_y + f_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} K_x$$

$$b_{32} = \alpha_1 \alpha_2 K_y + \alpha_1 f_2 K_x$$

$$b_{33} = \alpha_2^2 K_y + \alpha_2 f_2 K_x \tag{6-43}$$

以及

$$
\left.\begin{aligned}
&d_{11}=\left[\frac{\partial h_1}{\partial x}\right]^2 L_y \\
\text{其中}\quad &L_y=\iint_s x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{I_y}{m(x,y)}\text{。}I_y\text{ 为惯性矩。} \\
&d_{12}=\alpha_1\frac{\partial h_1}{\partial x}L_y+f_1\frac{\partial h_1}{\partial x}L_{xy} \\
\text{其中}\quad &L_{xy}=\iint_s x(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{I_{xy}}{m(x,y)}\text{。}I_{xy}\text{ 为惯性积。} \\
&d_{13}=\alpha_2\frac{\partial h_1}{\partial x}L_y+f_2\frac{\partial h_1}{\partial x}L_{xy} \\
&d_{21}=d_{12} \\
&d_{22}=\alpha_1^2L_y+f_1^2L_x+2\alpha_1f_1L_{xy} \\
\text{其中}\quad &L_x=\iint_s y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{I_x}{m(x,y)} \\
&d_{23}=\alpha_1\alpha_2L_y+f_1f_2L_x+(\alpha_1f_2+\alpha_2f_1)L_{xy}=0 \\
&d_{31}=d_{13} \\
&d_{32}=d_{23}=0 \\
&d_{33}=\alpha_2^2L_y+f_2^2L_x+2\alpha_2f_2L_{xy}
\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}44)
$$

将动能、位能以及广义气动力代入拉格朗日运动方程式，即得：

$$
\left.\begin{aligned}
&2\left(A_1+\frac{1}{2}a_{11}\right)\ddot{q}_1+A_4\ddot{q}_2+A_5\ddot{q}_3+2B_1q_1= \\
&-4\rho a[(b_{11}Uq_1+d_{11}\dot{q}_1)+(b_{12}Uq_2+d_{12}\dot{q}_2)+ \\
&(b_{13}Uq_3+d_{13}\dot{q}_3)] \\
&A_4\dot{q}_1+2A_2\dot{q}_2+2B_2q_2=-4\rho a[(b_{21}Uq_1+d_{21}\dot{q}_1)+ \\
&(b_{22}Uq_2+d_{22}\dot{q}_2)+(b_{23}Uq_3+d_{23}\dot{q}_3)] \\
&A_5\dot{q}_1+2A_3\dot{q}_3+2B_4q_3=-4\rho a[(b_{31}Uq_1+d_{31}\dot{q}_1)+ \\
&(b_{32}Uq_2+d_{32}\dot{q}_2)+(b_{33}Uq_3+d_{33}\dot{q}_3)]
\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}45)
$$

设$q_1=\bar{q}_1\mathrm{e}^{i\omega t}$，　$q_2=\bar{q}_2\mathrm{e}^{i\omega t}$，　$q_3=\bar{q}_3\mathrm{e}^{i\omega t}$，

则$\dot{q}_1=i\omega q_1$，　$\dot{q}_2=i\omega q_2$，　$\dot{q}_3=i\omega q_3$，

$$\ddot{q}_1 = -\omega^2 q_1, \quad \ddot{q}_2 = -\omega^2 q_2, \quad \ddot{q}_3 = -\omega^2 q_3。$$

(6-45)式化简为

$$\left.\begin{aligned} a_1 q_1 + b_1 q_2 + c_1 q_3 &= 0 \\ a_2 q_1 + b_2 q_2 + c_2 q_3 &= 0 \\ a_3 q_1 + b_3 q_2 + c_3 q_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6-46}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \Big[-2\Big(A_1 + \frac{1}{2}a_{11}\Big)\omega^2 + 4i\omega\rho a d_{11} + \\ &\qquad (2B_1 + 4\rho a b_{11} U)\Big] \\ b_1 &= [-A_4\omega^2 + 4i\omega\rho a d_{12} + 4\rho a b_{12} U] \\ c_1 &= [-A_5\omega^2 + 4i\omega\rho a d_{13} + 4\rho a b_{13} U] \\ a_2 &= [-A_4\omega^2 + 4i\omega\rho a d_{21} + 4\rho a b_{21} U] \\ b_2 &= [-2A_2\omega^2 + 4i\omega\rho a d_{22} + (2B_2 + 4\rho a b_{22} U)] \\ c_2 &= [4i\omega\rho a d_{23} + 4\rho a b_{23} U] \\ a_3 &= [-A_5\omega^2 + 4i\omega\rho a d_{31} + 4\rho a b_{31} U] \\ b_3 &= [4i\omega\rho a d_{32} + 4\rho a b_{32} U] \\ c_3 &= [-2A_3\omega^2 + 4i\omega\rho a d_{33} + (2B_4 + 4\rho a b_{33} U)] \end{aligned}\right\} \tag{6-47}$$

若 q_1, q_2, q_3 有非零解，则其系数行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{6-48}$$

或者

$$\begin{aligned} \Delta &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 \end{aligned} \tag{6-49}$$

展开，得实部方程式和虚部方程式：

$$\left.\begin{aligned} AU^3 + BU^2 + CU + D = 0 \\ EU^2 + FU + G = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6-50}$$

以及

$$A = K_H^3 \cdot \Gamma_1 \tag{6-51}$$

其中，K_H 为高度参数，$K_H = 4\rho a$。

$$\Gamma_1 = b_{11}b_{22}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{33}b_{21}b_{12} + b_{23}b_{31}b_{12} - b_{13}b_{31}b_{22}$$

$$B = K_H^2[\Gamma_2\omega^2 + \Gamma_3] \tag{6-52}$$

其中，ω 为颤振圆频率。

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = & -2A_3b_{11}b_{22} - A_5b_{21}b_{32} + 2A_3b_{21}b_{12} + A_5b_{31}b_{22} - \\ & 2A_2b_{11}b_{33} - (2A_1 + a_{11})b_{22}b_{33} + (2A_1 + a_{11})b_{23}b_{32} - \\ & A_4b_{13}b_{32} + A_4(b_{12} + b_{21})b_{33} - (A_5b_{12} + A_4b_{31})b_{23} + \\ & (A_5b_{22} + 2A_2b_{31})b_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_3 = & 2B_4b_{11}b_{22} - 2B_4b_{21}b_{12} + 2B_1b_{22}b_{33} - \\ & 2B_1b_{23}b_{32} - 2B_2b_{13}b_{31} + 2B_2b_{11}b_{33} \end{aligned}$$

$$C = K_H\Gamma_4 + K_H\omega^2\Gamma_5 + K_H^3\omega^2\Gamma_6 + K_H\omega^4\Gamma_7 \tag{6-53}$$

其中，$\Gamma_4 = 4B_1B_4b_{22} + 4B_2B_4b_{11} + 4B_1B_2b_{33}$

$$\begin{aligned} \Gamma_5 = & -4A_3B_1b_{22} - 4A_3B_2b_{11} - 2B_4(2A_2 + a_{11})b_{22} - \\ & 4A_2B_4b_{11} + 2A_4B_4b_{12} + 2A_4B_4b_{21} - 2A_5B_2b_{31} - \\ & 4A_2B_1b_{33} - 2B_2(2A_1 + a_{11})b_{33} + 2A_5B_2b_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_6 = & -b_{22}d_{11}d_{33} - b_{11}d_{22}d_{33} - b_{32}d_{13}d_{21} + b_{12}d_{21}d_{33} + \\ & b_{21}d_{12}d_{33} + b_{22}d_{13}d_{31} + b_{31}d_{13}d_{22} - b_{33}d_{11}d_{22} + \\ & b_{33}d_{12}d_{21} - b_{23}d_{12}d_{31} + b_{13}d_{22}d_{31} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_7 = & 2A_3b_{22}(2A_1 + a_{11}) + 4A_2A_3b_{11} + A_4A_5b_{32} - \\ & 2A_3A_4b_{12} - 2A_3A_4b_{21} + 2A_2(2A_1 + a_{11})b_{33} - \\ & A_4^2b_{33} + A_4A_5b_{23} - 2A_2A_5b_{13} - A_5^2b_{22} - 2A_2A_5b_{31} \end{aligned}$$

$$D = \Gamma_8K_H^2\omega^2 + K_H^2\omega^4\Gamma_9 + \omega^6\Gamma_{10} + \omega^4\Gamma_{11} + \omega^2\Gamma_{12} + \Gamma_{13} \tag{6-54}$$

其中 $\Gamma_8 = 2B_4d_{12}d_{21} - 2B_1d_{22}d_{33} - 2B_2d_{11}d_{33} +$

$$2B_2 d_{13} d_{31} - 2B_4 d_{11} d_{22}$$

$$\Gamma_9 = -2A_3 d_{12} d_{21} - A_5 d_{22} d_{31} + (2A_1 + a_{11}) d_{22} d_{33} + 2A_2 d_{11} d_{33} - A_4 d_{12} d_{33} - A_4 d_{21} d_{33} - A_5 d_{13} d_{22} - 2A_2 d_{13} d_{31} + 2A_3 d_{11} d_{22}$$

$$\Gamma_{10} = 2A_3 A_4^2 + 2A_2 A_5^2 - 4A_2 A_3 (2A_1 + a_{11})$$

$$\Gamma_{11} = -2B_4 A_4^2 - 2B_2 A_5^2 + 8A_2 A_3 B_1 + 4A_3 B_2 (2A_1 + a_{11}) + 4A_2 B_4 (2A_1 + a_{11})$$

$$\Gamma_{12} = -8A_3 B_1 B_2 - 8A_2 B_1 B_4 - 4B_2 B_4 (2A_1 + a_{11})$$

$$\Gamma_{13} = 8B_1 B_2 B_4$$

（以上是实部方程式的系数）。

此外

$$E = K_{H\omega}^3 \Gamma_{14} \tag{6-55}$$

其中 $\Gamma_{14} = b_{22} b_{33} d_{11} + b_{11} b_{33} d_{22} - b_{23} b_{32} d_{11} + b_{13} b_{32} d_{21} - b_{12} b_{33} d_{21} - b_{21} b_{33} d_{12} + b_{12} b_{23} d_{31} + b_{23} b_{31} d_{12} - b_{13} b_{22} d_{31} - b_{13} b_{31} d_{22} + b_{11} b_{22} d_{33} + b_{21} b_{32} d_{13} - b_{12} b_{21} d_{33} - b_{22} b_{31} d_{13}$

$$F = K_{H\omega}^2 \Gamma_{15} + K_{H\omega}^2 \omega^2 \Gamma_{16} \tag{6-56}$$

其中 $\Gamma_{15} = 2B_4 b_{11} d_{22} + 2B_4 b_{22} d_{11} - 2B_4 b_{12} d_{21} - 2B_4 b_{21} d_{12} + 2B_1 b_{22} d_{33} + 2B_2 b_{11} d_{33} - 2B_2 b_{21} d_{13} + 2B_1 b_{33} d_{22} + 2B_2 b_{33} d_{11} - 2B_2 b_{13} d_{31}$

$$\Gamma_{16} = -2A_3 b_{22} d_{11} - 2A_3 b_{11} d_{22} - A_5 b_{32} d_{21} + 2A_3 b_{12} d_{21} + 2A_3 b_{21} d_{12} + A_5 b_{22} d_{31} + A_5 b_{31} d_{22} - 2A_2 b_{11} d_{33} - (2A_1 + a_{11}) b_{22} d_{33} - A_4 b_{32} d_{13} + A_4 b_{12} d_{33} + A_4 b_{21} d_{33} + A_5 b_{22} d_{13} + 2A_2 b_{31} d_{13} - (2A_1 + a_{11}) b_{33} d_{22} - 2A_2 b_{33} d_{11} + A_4 b_{33} d_{12} + A_4 b_{33} d_{21} - A_5 b_{23} d_{12} - A_4 b_{23} d_{31} + A_5 b_{13} d_{22} + 2A_2 b_{13} d_{31}$$

$$G = K_{H\omega} \Gamma_{17} + K_{H\omega}^3 \Gamma_{18} + K_{H\omega}^5 \Gamma_{19} + K_{H\omega}^3 \omega^3 \Gamma_{20} \tag{6-57}$$

其中 $\Gamma_{17} = 4B_1 B_4 d_{22} + 4B_2 B_4 d_{11} + 4B_1 B_2 d_{33}$

$$\Gamma_{18} = -2B_4(2A_1 + a_{11})d_{22} - 4A_2B_4d_{11} - 4A_3B_1d_{22} - 4A_3B_2d_{11} + 2A_4B_4d_{12} + 2A_4B_4d_{21} + 2A_5B_2d_{31} - 4A_2B_1d_{33} - 2B_2(2A_1 + a_{11})d_{33} + 2A_5B_2d_{13}$$

$$\Gamma_{19} = 2A_3(2A_1 + a_{11})d_{22} + 4A_2A_3d_{11} - 2A_3A_4d_{12} - 2A_3A_4d_{21} - A_5^2d_{22} - 2A_2A_5d_{31} + 2A_2(2A_1 + a_{11})d_{33} - A_4^2d_{33} - 2A_2A_5d_{13}$$

$$\Gamma_{20} = -d_{11}d_{22}d_{33} + d_{12}d_{21}d_{33} + d_{13}d_{22}d_{31}$$

(以上是虚部方程式的系数)。

由(6-50)式,可求出 U 和 ω 的两个未知数。

2. 选取五个自由度列写身-舵组合体的位移函数

$$H(x,y,t) = \sum_{i=0}^{4} h_i(x,y)q_i(t) \tag{6-58}$$

它们分别是:

(1) 机身绕重心的俯仰

$$h_0(x,y) = \frac{1}{l}(x_G - x), \quad \omega_0 = 0$$

(2) 机体的一阶弯曲(垂直平面内)

$h_1(x,y) = h_1(x)$,频率为 ω_1。

(3) 机体的二阶弯曲

$h_2(x,y) = h_2(x)$,频率为 ω_2。

(4) 操纵面的朴振

$$h_3(x,y) = f \cdot \frac{y}{l_a}$$

其中,f 为操纵面的朴振角,y 为操纵面沿翼展方向的坐标,l_a 为操纵面的半翼展。

(5) 操纵面的偏转

$$h_4(x,y) = \frac{1}{2ba}(x_a - x)$$

其中，$2ba$ 为操纵面根弦，x_a 为操纵面转轴到机体头部的距离(见图6-4)。

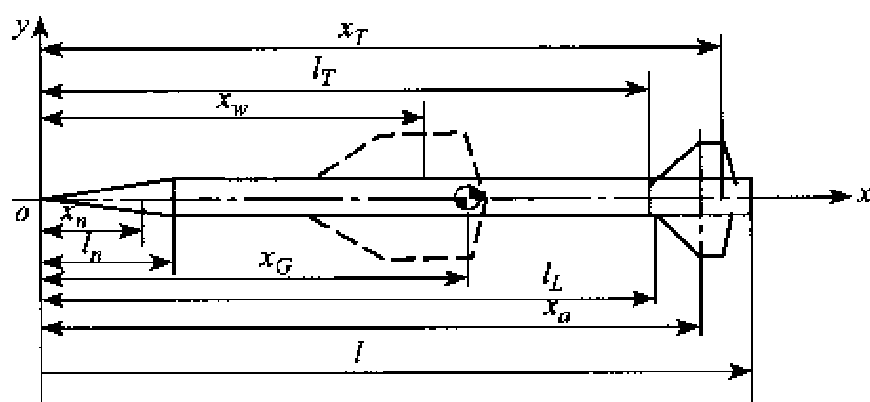


图 6-4　身-(翼)-操纵面组合体

此时，组合体的动能表示为：

$$T = \frac{1}{2}\iint_s m(x,y)[h_0\dot{q}_0 + h_1\dot{q}_1 + h_2\dot{q}_2 + h_3\dot{q}_3 + h_4\dot{q}_4]^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{4} M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{6-59}$$

当 $i,j=0,1,2$ 时，

$$M_i = \int_0^l m_B(x)h_i^2(x)\mathrm{d}x$$

其中，$M_B(x)$为机体的质量分布。

$$M_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

当 $i,j=3,4$ 时，

$$M_{ij} = 2\int_0^{l_a}\mathrm{d}y\int_{l_L+Ly}^{l_L+2b_a+Ty} m_a(x,y)h_i(x,y)h_j(x,y)\mathrm{d}x$$

当 $i=0,1,2,j=3,4$ 时，

$$M_{ij} = 2h_i(x_a)\int_0^{l_a} \mathrm{d}y\int_{l_L+Ly}^{l_L+2b_a+Ty} m_a(x,y)h_j(x,y)\,\mathrm{d}x$$

其中，$L = \mathrm{tg}\Lambda$（Λ 为前缘后掠角），$T = \mathrm{tg}\Lambda_{T.E}$（$\Lambda_{T.E}$ 是后缘后的掠角）。

组合体的位能表示为：

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4}\omega_i^2 M_i q_i^2 \tag{6-60}$$

其中，ω_0 可取为 $10^{-3}\omega_1$ 的数量级。

广义气动力是由各部件产生的，概括表达为：

$$\begin{aligned} Q_i &= \iint_s \Delta p_j(x,y,t)h_j(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sum_{j=0}^{4} q_j(t)\iint \Delta\bar{p}_j(x,y)h_j(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)\sum_{j=0}^{4} A_{ij}q_j(t) \end{aligned} \tag{6-61}$$

确定身、操纵面、翼面的非定常气动力是极其复杂的。这里，我们采用定常气动力系数（甚至可以引入风洞试验数据）。

当 $i,j=0,1,2$ 时，

$$\begin{aligned} A_{ij} = &-C_{y_n}^{\alpha}\bar{\omega}_j(x_n)\cdot h_i(x_n)s_B - C_{y_T}^{\alpha}\bar{\omega}_j(x_T)h_i(x_T)s_B - \\ &C_{yw}^{\alpha}\bar{\omega}_j(x_w)\cdot h_i(x_w)s_w - C_{y_a}^{\alpha}\bar{\omega}_j(x_a)h_i(x_a)s_a \end{aligned} \tag{6-62}$$

其中“n”表示机身头部参数，“T”表示机身尾部参数，“w”表示翼面参数，“a”表示操纵面参数。例如 C_{yw}^{α} 为翼面的升力系数斜率，x_w 为翼面的压力中心位置（至机身头部），s_w 为翼面面积（半个外露翼），s_B 为机体的最大剖面积。

当 $i,j=3,4$ 时，

$$A_{ij} = -C_{y_a}^{\alpha}\int_0^{l_a}\mathrm{d}y\int_{l_L+Ly}^{l_L+2b_a+Ty}\bar{w}_j(x,y)h_i(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{6-63}$$

当 $i=0,1,2,j=3,4$ 时，

$$A_{i3} = -C_{y_a}^{\alpha}h_i(x_a)\int_0^{l_a}\mathrm{d}y\int_{l_L+Ly}^{l_L+2b_a+Ty}\bar{w}_3(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{6-64}$$

$$A_{i4} = -C_{y_a}^{\alpha} h_i(x_a)\left[i\frac{k}{R}N - \frac{s_a}{(2b_a)}\right] \tag{6-65}$$

式中 $k = \dfrac{R\omega}{U}$

$$N = \frac{1}{2(2b_a)}\left\{\frac{l_a^3}{3}(L^2 - T^2) - l_a^2[L(x_a - l_L) - T(x_a - l_L - 2b_a)] + 2b_a l_a(2x_a - 2l_L - 2b_a)\right\}$$

当 $i = 3,4, j = 0,1,2$ 时,

$$A_{ij} = -C_{y_a}^{\alpha}\overline{w}_j(x_a)\int_0^{l_a}\mathrm{d}y\int_{l_L+Ly}^{l_L+2ba+Ty} h_i(x,y)\mathrm{d}x \tag{6-66}$$

广义气动力系数中的下洗函数表示为：

$$\ddot{w}_j(x,y) = i\frac{k}{R}h_j(x,y) + \frac{\partial h_j(x,y)}{\partial x} \tag{6-67}$$

振型函数的定义域如下：

当 $i=0,1,2$ 时,

$$h_i(x,y) = \begin{cases} h_i(x_w) & \text{机翼部分} \\ h_i(x_a) & \text{操纵面部分} \\ h_i(x) & \text{其他部分} \end{cases}$$

当 $i=3,4$ 时,

$$h_i(x,y) = \begin{cases} h_i(x,y) & \text{操纵面} \\ 0 & \text{其他部分} \end{cases}$$

将动能(6-59)、位能(6-60)以及广义气动力(6-61)式代入拉格朗日运动方程式,得

$$\sum_{j=1}^{4} M_{ij}\ddot{q}_j + \omega_i^2 M_i q_i = \left(\frac{1}{2}\rho U^2\right)\sum_{j=0}^{4} A_{ij}q_j \tag{6-68}$$

或者写成矩阵形式

$$\overline{\Omega}\{\overline{q}\} = [U]\{\overline{q}\} \tag{6-69}$$

同(5-43)式。

§3. 考虑舵面操纵系统的全机颤振问题

一架现代飞机可视为典型的三元弹性系统，除了细长机身和小展弦比的机翼、尾翼之外，还有着各种类型的舵面和襟翼。带操纵系统的舵面也作为自动飞行控制系统和稳定系统的一个环节，因为舵面-操纵系统和陀螺仪感受到飞机的某些固有振动之间的耦合，在很大程度上可能影响到自动控制系统。

图 6-5 是升降舵的操纵系统和液压作动筒简图。液压作动筒作为舵面和飞机结构之间的很刚硬和几乎不可逆的连接元件，它的有效刚度用阻抗函数

$$Z_{\beta}(\omega)=\frac{M_{s}(\omega)}{\beta} \tag{6-70}$$

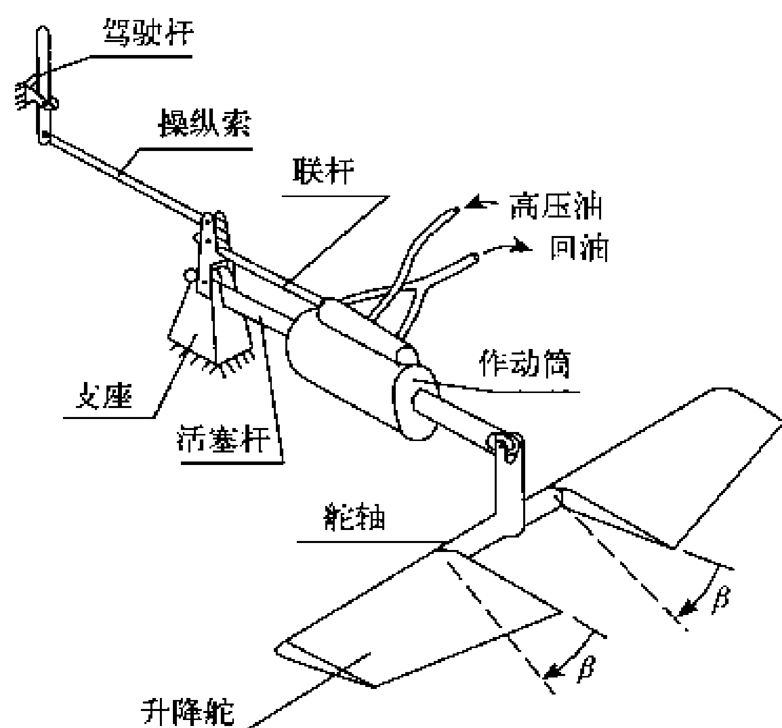


图 6-5(1)　升降舵及其操纵系统

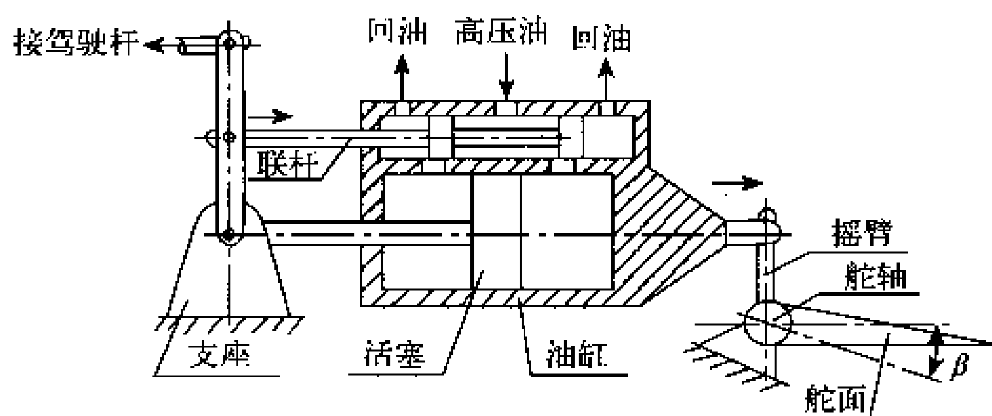


图 6-5(2) 液压作动筒

表征。该函数表示舵面伺服的反作用力矩 $M_s(\omega)$ 与由此而产生的舵面偏角 β 之比,可以通过地面振动试验求得。

安放在飞机上的敏感元件(陀螺仪)感受飞机的弹性振动。如图 6-6 所示的机身弯曲变形,在陀螺仪的位置上引起一个附加的俯仰角 θ,从而产生正比于$(\alpha+\theta)$ 的讯号,为了保证按规定的航迹飞行,相应地加大了舵面的偏角 $\Delta\beta$。从气动弹性的观点分析,由此而产生的舵面气动力在很大程度上可能影响到颤振特性。

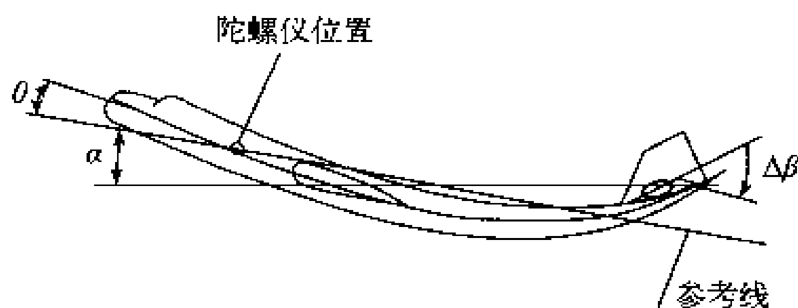


图 6-6 机身的弹性振动对陀螺仪和舵面的影响

我们用传递函数描述飞机的弹性振动和控制系统响应的相互作用。对于线性定常系统,它定义为初始条件为零时,输出量的拉普拉

斯变换与输入量的拉普拉斯变换之比(有关传递函数的知识,读者可参阅文献[53])。图 6-7 表示了一个飞行力学的控制和稳定系统的典型伺服弹性反馈过程。对于任意的弹性自由度和刚体自由度,该系统的传递函数为

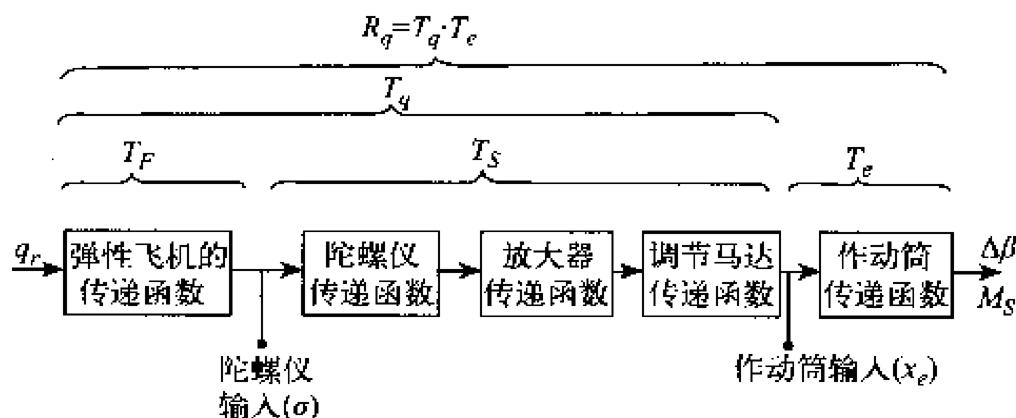


图 6-7　典型的伺服弹性反馈过程

$$R_q = \frac{\Delta\beta}{q_r} = T_q \cdot T_e \tag{6-71}$$

其中

$$T_q = \frac{X_e}{q_r} \tag{6-72}$$

$$T_e = \frac{\Delta\beta}{X_e} \tag{6-73}$$

传递函数 T_q 表示陀螺仪处的广义位移与作动筒输入之间的关系,作动筒传递函数 T_e 表示输入 X_e 与输出 $\Delta\beta$(偏转)或者 M_s(力矩)之间的关系。由图 6-7 知,T_q 是一个很复杂的传递函数,它由弹性飞机的传递函数 T_F 和电学-力学的陀螺仪转换系统的传递函数 T_s 组成,即

$$T_q = T_F \cdot T_s \tag{6-74}$$

其中

$$T_F = \frac{\sigma}{q_r} \tag{6-75}$$

它表示陀螺仪的输入量 σ(包括角速度 Ω、偏转 φ,θ 和 ψ 等)与不同的

固有振动幅值之间的关系。该函数与陀螺仪在机身上的位置和固有振动的种类有关，可由地面振动试验求出陀螺仪的最佳位置。

陀螺仪转换系统的传递函数：

$$T_s = \frac{X_e}{\sigma} \tag{6-76}$$

表示作动筒输入与陀螺仪输入的关系。

考虑到结构变形与传递函数之间的相关性，传递函数可通过计算由测量的振型求得，也可用单个力激振对某些频率测出传递函数。

将传递函数和阻抗函数引入颤振方程式，因为这两个函数均是频率(ω)的函数，只有颤振方程式求得的 ω_f 与上述频率 ω 相同时，才是我们所求的颤振解。由于在方程式推导中要涉及许多公式，此处我们不予详述，读者可参阅文献[5]的有关章节。

§4. 计算例子

例 1　某翼-身组合体的参数(图 6-1)为：

$l - x_n = 40R_0$，　　　$l_n = 3R_0$，

$l_{w_2} - l_{w_1} = 10R_0$，　　　$M_1/\pi\rho R_0^3 = 5\times 10^4$。

(其中 R_0 为机翼后缘以后的弹身半径)。

对半翼展长 $b(l_{w_2}) = 4R_0$ 和 $b(l_{w_2}) = 6R_0$ 的翼面位置 $\xi_w = x_w - x_n/l - x_n$ 为 0.6 和 0.7 组成的四种情况作了计算[52]。

翼面的气动力中心的坐标按下式求得：

$$x_w = l_{w_1} + \int_{l_{w_1}}^{l_{w_2}} (b - R_0^2/b)\ (x - l_{w_1})\mathrm{d}x \Big/ \int_{l_{w_1}}^{l_{w_2}} (b - R_0^2/b)\mathrm{d}x$$

弹身头部的气动力中心的坐标为

$$x_n = \int_0^{l_n} Rx\,\mathrm{d}x \Big/ \int_0^{l_n} R\mathrm{d}x$$

对于圆锥形的头部，$x_n = (2/3)l_n$。

在 $M = 1$ 时，按细长体理论计算。当 $M > 4$ 时，按活塞理论和牛

顿流理论分别计算翼面和弹身头部的气动力。

该翼-身组合体作刚体平移（$h_1(x)=1$，$\omega_1=0$）、刚体俯仰$\left(h_2(x)=\frac{1}{l}(x_G-x),\ \omega_2=0\right)$以及第一阶弹性弯曲振动（振型为$h_3(x)$，频率为$\omega_3$）。

对于上述四种情况，即

(1) $\xi_w=0.6$，$b(l_{w_2})=4R_0$；

(2) $\xi_w=0.6$，$b(l_{w_2})=6R_0$；

(3) $\xi_w=0.7$，$b(l_{w_2})=4R_0$；

(4) $\xi_w=0.7$，$b(l_{w_2})=6R_0$。

作翼-身组合体的颤振计算，其结果如图 6-8 所示，图中给出了无因次颤振速度随马赫数的变化曲线。

对于$\xi_w=0.6$的情况（图 6-8 的(1)，(2)），颤振速度随马赫数的增加而提高，如同通常所见的单独翼面的颤振现象。同时翼展增大，U_f 降低。

对于$\xi_w=0.7$的情况（图 6-8 的(3)、(4)），颤振临界速度的上下限随马赫数的增加而相互接近。当$b(l_{w_2})=4R_0$时（图 6.8 的(3)），到$M=16.7$颤振便消失了。此外，翼展增大时，颤振速度的下限降低，而颤振速度的上限却增高。

例 2　翼（带副翼）-身组合体（图 6-9）。

该机翼具有 70°的前缘后掠角、夹层钢结构的小展弦比三角翼，发动机在翼展方向位于副翼的内侧[53]。

由于翼面具有小展弦比和大后掠角，为了简化分析，采用了不考虑弦向弯曲变形的简单振型，并援引三元定常气动力系数。

在计算中选取六种振型：机体的滚转、翼面的四个挠曲振型（其中两个是弯曲振型、两个是扭转振型，即机翼绕后缘前面 4.53 m 的一条线的扭转）以及副翼的偏转。即

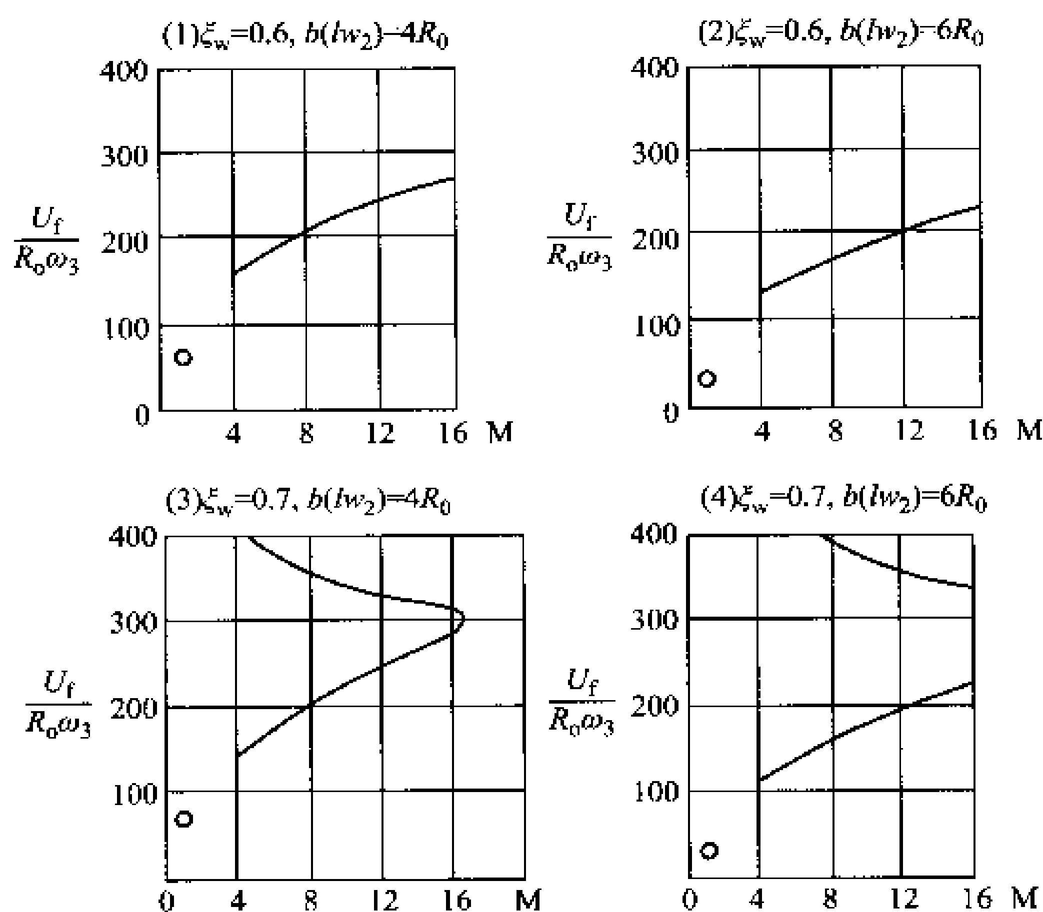


图 6-8　翼-身组合体的颤振特性

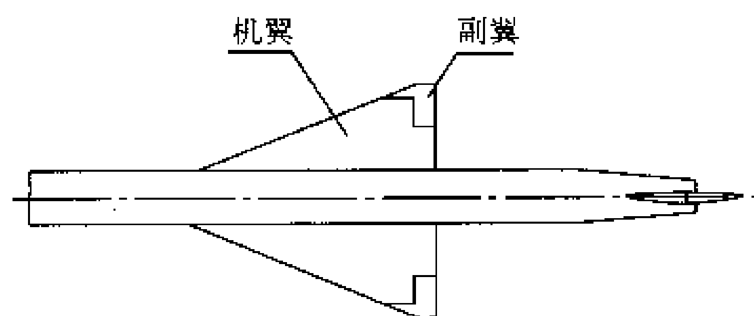


图 6-9　翼(带副翼)-身组合体

$$
\left.\begin{aligned} h_1 &= \bar{y} \\ h_2 &= \bar{y}^2 \\ h_3 &= \bar{y}^3 \end{aligned}\right\} \text{弯曲频率为 6.3 r/s。}
$$

$$
\left.\begin{aligned} h_4 &= \bar{y}^2 \\ h_5 &= \bar{y}^3 \end{aligned}\right\} \text{扭转频率为 9.9 r/s。}
$$

翼(副翼)-身组合体的广义位移：

$$
H = c_r\{h_1(\bar{y})q_1 + h_2(\bar{y})q_2 + h_3(\bar{y})q_3\}
$$

以及

$$
\alpha = h_4(\bar{y})q_4 + h_5(\bar{y})q_5
$$

$$
\beta = q_6
$$

式中 $\bar{y} = y/l$，为无因次的展向坐标，α 为机翼的攻角，β 为副翼的偏转角。c_r 为机翼的参考弦长。

当副翼频率大于 20 r/s 时，副翼对颤振速度的影响很小；当副翼频率低于此值时，则颤振速度随着副翼频率的减小而迅速降低。计算得到的颤振速度和颤振频率分对称情况和反对称情况列于表 6-1。援引的颤振速度用因子($1-0.166M\cos\Lambda$)进行马赫数修正。其中 M 为颤振时的马赫数，Λ 为机翼前缘后掠角。

表 6-1 翼(副翼)-身组合体颤振特性

副翼频率 (r/s)	颤振速度/(m/s)		颤振频率/(r/s)	
	对 称	反对称①	对 称	反对称
∞	990	1 070	7.5	3.2
10	775	506	15.9	11.0

① 反对称情况包括了机体的滚转自由度。

例 3. 身-舵组合体(图 6-10)。

该例属于鸭舵设计方案。计算中选取了五个振型[53]，它们分别是：

振型 1 $z = c\bar{\xi}_1^2 q_1$，频率为 3.1r/s；

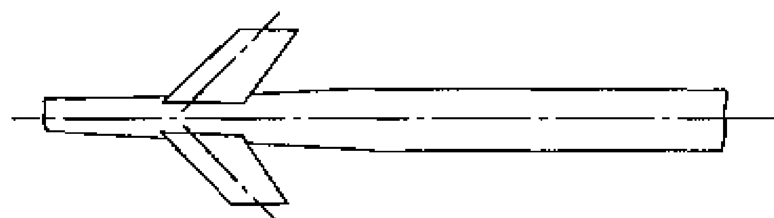


图 6-10　身-舵组合体

振型 2　$z = c_r\bar{\xi}_2^2(1 - k\bar{\xi}_2)q_2$，频率为 11.4 r/s。其中 $\bar{\xi}_1$，$\bar{\xi}_2$ 分别为机身的一、二阶对称振型的前节点到机身任意点的无因次距离。k 为使 $A_{12} = 0$（文献[54]）。

对于任意的反对称振型，机身的任一剖面滚转给定为：$\theta = \bar{\xi}_1 q_1$，频率为 8.7 r/s。（略去了机身反对称的二阶振型）。

鸭舵的振型

振型 3　沿铰链线的抛物线弯曲，频率为 10.1 r/s，位移为：

$$z = c_r\bar{y}^2 q_3 + \alpha(c_r\bar{x}_1)$$

$$\alpha = \frac{c_r}{l}\bar{y}\sin 2\Lambda_1 \cdot q_3$$

式中，$\bar{y}$ 为无因次的展向坐标，在气动力中心线处，$\bar{y} = 0$；$\overline{x_1}$ 为无因次的弦向坐标，在鸭舵铰链线处，$\overline{x_1} = 0$；α 为鸭舵的攻角；Λ_1 为鸭舵铰链线的后掠角；c_r 为鸭舵的参考弦长；l 为半展长。

振型 4　相对铰链线的偏转，频率是变化的。位移为：

$$z = c_r\bar{x}_1\cos\Lambda_1 \cdot q_4$$

$$\alpha = \cos\Lambda_1 \cdot q_4$$

振型 5　相对中弦线的线性扭转，频率为 23.3 r/s。位移为

$$z = c_r\bar{y}\ \bar{x}_2 \cdot \cos\Lambda_2 \cdot q_5$$

$$\alpha = \cos\Lambda_2 \cdot q_5$$

其中，Λ_2 为鸭舵中弦线的后掠角；$\bar{x}_2$ 为无因次的弦向坐标，在中弦线处 $\bar{x}_2 = 0$。

对称颤振速度随鸭舵偏转频率的变化曲线如图 6-11 所示。对称颤振速度对机身频率的变化不敏感，尤其在高的偏转频率时。

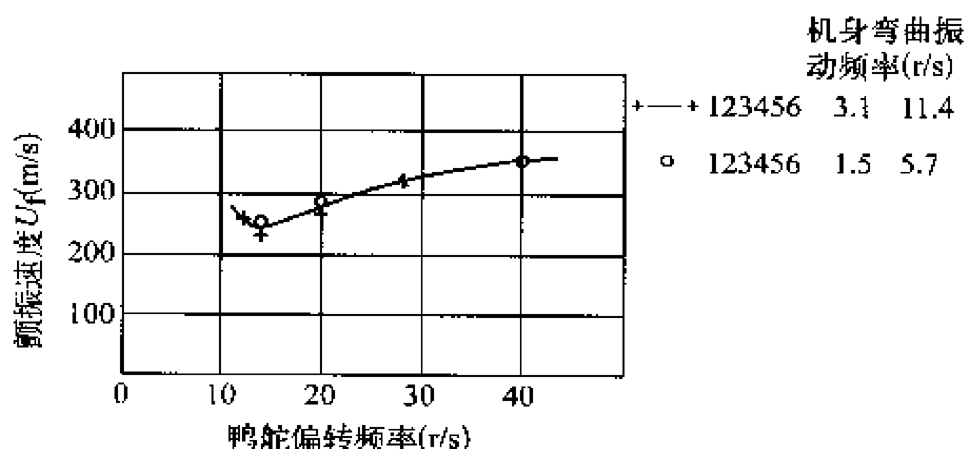


图 6-11　鸭舵偏转频率和机身弯曲频率对对称颤振的影响[54]

反对称颤振速度随鸭舵偏转频率的变化曲线如图 6-12 所示。反对称颤振较对称颤振对机身刚度的变化敏感。当机身扭转刚度增加时，颤振速度降低（此时，要求鸭舵偏转频率大于或远离前舵的弯曲频率）。

当鸭舵偏转频率在 14 和 40 r/s 之间时，对称颤振比反对称颤振在较低的气流速度下发生（此时，鸭舵的弯曲频率为 10.1 r/s）。

例 4　一架近代超音速歼击机在 $M=1.4$，海平面高度的全机反对称颤振计算[5]。

计算中包括了十二个自由度（固有振型），分别用 A-11、A-12、A-13、…（它们的含义见表 6-2）表示，并把地面振动试验测量的振动参数汇总于表 6-2。组合颤振计算结果如图 6-13 所示。

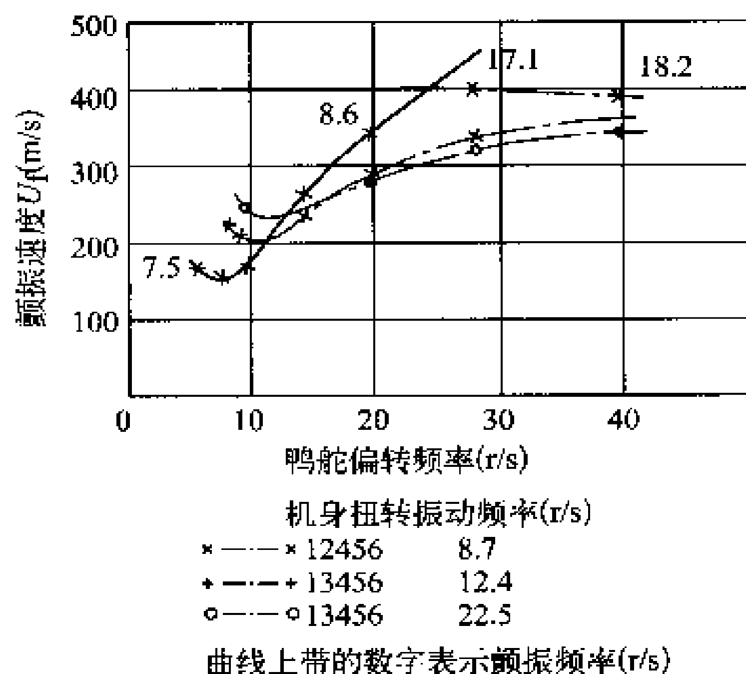


图 6-12 鸭舵偏转频率和机身扭转频率对反对称颤振的影响[54]

表 6-2 全机颤振计算中用到的振动参数

自由度标记	固有频率 $f_r=\omega_r/2\pi$(r/s)	广义质量 M_r(kg · cm^2)	阻尼参数 γ_r	附 注
A-11	26.1	29.5	0.095	机翼的低阶弯曲
A-12	46.7	46.5	0.023	机翼扭转
A-13	51.8	5.1	0.058	机翼的第一高阶弯曲
A-21	19.25	113	0.035	机身的第二水平弯曲
A-22	23.1	102	0.041	机身的第二水平弯曲
A 31	17.15	65.5	0.065	垂直尾翼的低阶弯曲
A-32	21.8	14.5	0.076	水平尾翼的低阶弯曲
A-33	55.5	14.6	0.045	水平尾翼的第一高阶弯曲
A-34	57.8	3.25	0.103	垂直尾翼扭转
A 35	69.3	19.6	0.133	水平尾翼扭转
A-41	31.1	4.2	0.124	副翼偏转
A 42	35.6	3.8	0.077	方向舵偏转

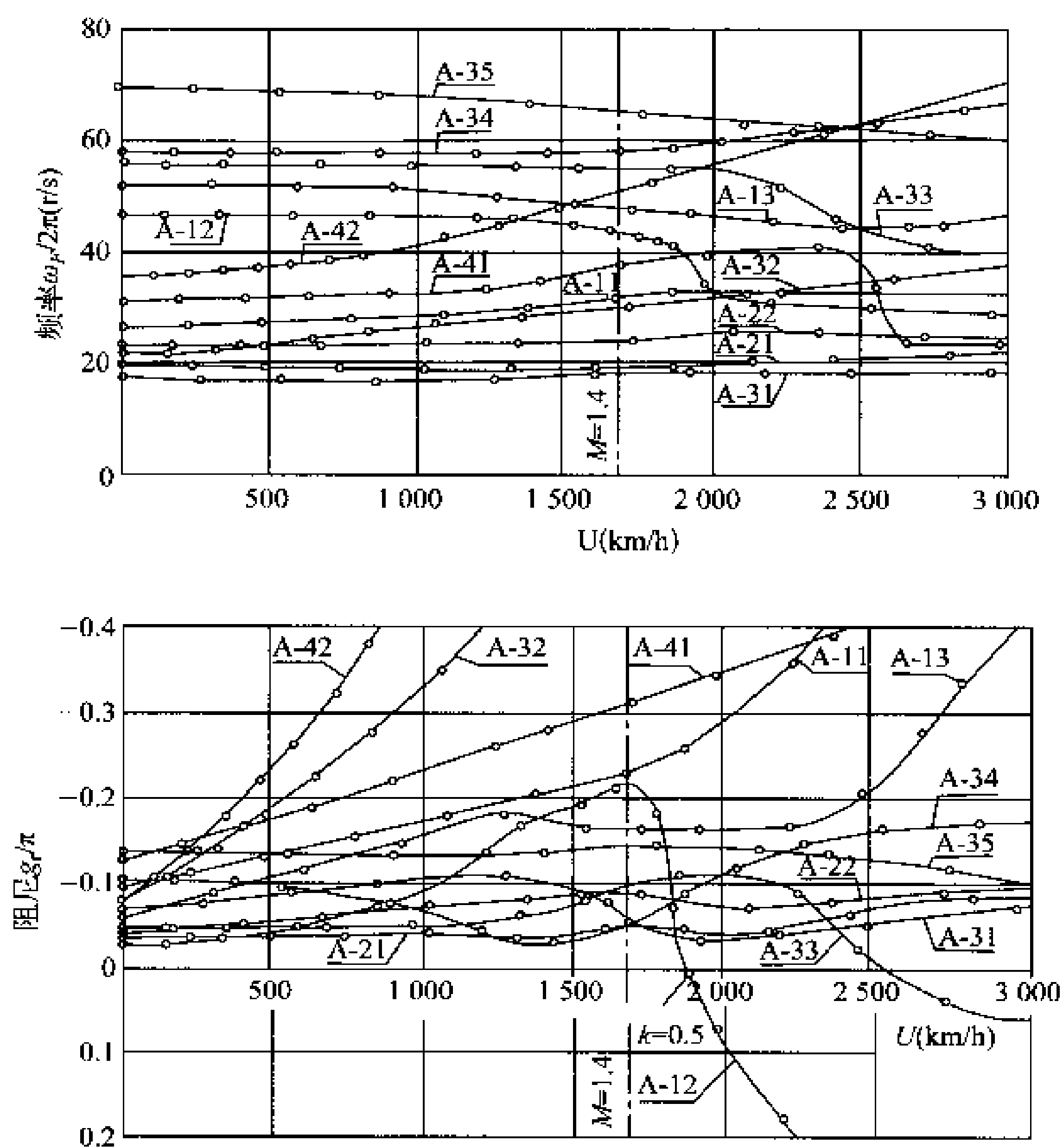


图 6-13　超音速歼击机在 $M=1.4$ 时，包含 12 个自由度的反对称型颤振结果

由图 6-13 知，飞机在 $M=1.4$ 时还是稳定的，但在 $M=1.55$ 时出现了颤振。自由度 A-12(典型的机翼扭转)在这种颤振中起了主要作用(见图 6-13 的频率图形)。由颤振解的复广义坐标 $q_r^{(s)}$ 模的

向量图(图 6-14)知,基本上是自由度 A-12(机翼扭转)、A-13(机翼的第一高阶弯曲)以及 A-41(副翼偏转)参与颤振。

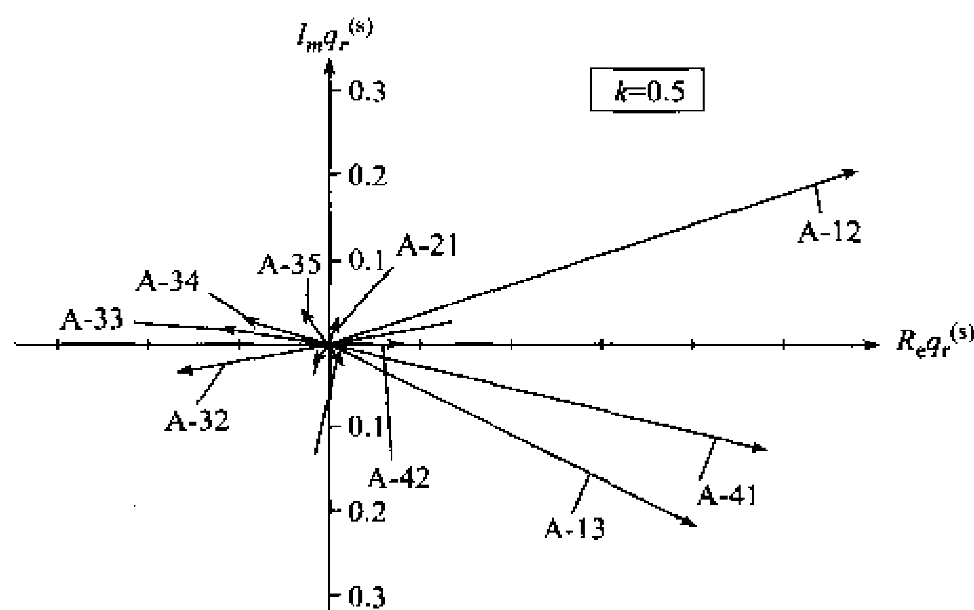


图 6-14 颤振解的复广义坐标 $q_r^{(s)}$ 模的向量图

第七章　蒙皮颤振

随着进入超音速和高超音速飞行，应当考虑蒙皮颤振（有人也称为板壁颤振）。试验已证实，蒙皮表面的颤振确实是存在的[55,56]。第二次世界大战期间，最初的德国 V-2 导弹由于其头部的蒙皮颤振而引发过多次事故。近代的土星 V-阿波罗飞行器，蒙皮颤振问题仍然是相当麻烦的事情。

蒙皮颤振与一般常见的升力面颤振有些不同。首先，它属于超音速现象，蒙皮的一面暴露在超音速流动之中，气动力的处理较为简单。结构变形方面，也另具特色。以下，我们分两节加以叙述。

§1. 有限长简支平板

如图 7-1 所示，平板的一面作用着超音速线性定常气动力，则其运动方程式表示为如下形式[57]：

$$D\nabla^4 w_{mn} + \tilde{m}\ddot{w} = -\frac{2q}{\beta}\sum\frac{\partial w}{\partial x} \tag{7-1}$$

式中　$\tilde{m}$ 为平板单位面积的质量；q 为气流的动压，即 $q = \frac{1}{2}\rho U^2$；$\beta = \sqrt{M^2 - 1}$（其中 M 为马赫数）。

D 为平板刚度，即

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \tag{7-2}$$

其中　E 为杨氏弹性模量，h 为平板厚度，μ 为材料的泊桑比。

w 为平板中性轴的挠度，用傅里叶级数表示，即

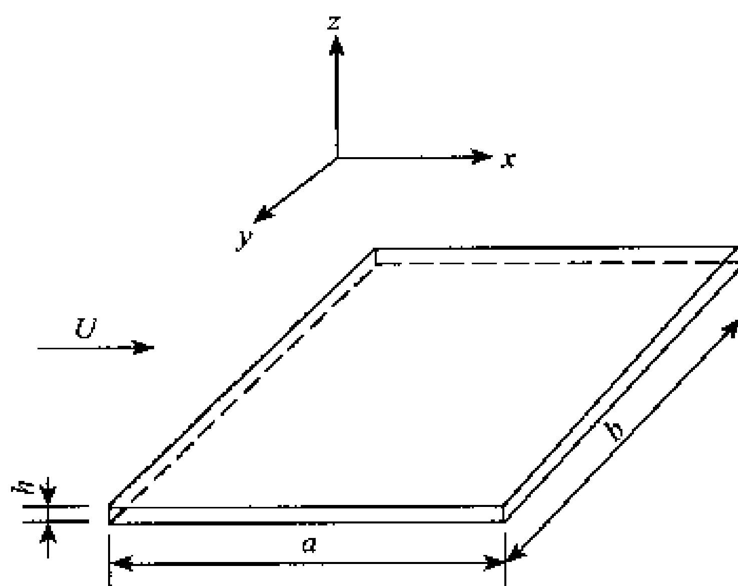


图 7-1 有限长平板

$$w_{mn}=c_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{b}e^{i\omega t} \tag{7-3}$$

其中，a 为平板在 x 方向的长度，b 为平板在 y 方向的长度。

对于二自由度情况的近似解，弯曲形态按伽里金（Galerkin）的结果给定为：

$$\left.\begin{aligned} w_{11} &= c_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}e^{i\omega t} \\ w_{21} &= c_{21}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}e^{i\omega t} \end{aligned}\right\} \tag{7-4}$$

将(7-4)式代入(7-1)式，则得表示二自由度的两个联立方程式。对于 w_{11}：

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w_{11} &= D\left(\frac{\partial^4 w_{11}}{\partial x^4}+\frac{2\partial^4 w_{11}}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w_{11}}{\partial y^4}\right) \\ &= D\left(\frac{\pi^4}{a^4}+\frac{2\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)c_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{7-5}$$

$$\tilde{m}\,\ddot{w}_{11}=-\omega^2\tilde{m}c_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\cdot\sin\frac{\pi y}{b}e^{i\omega t} \tag{7-6}$$

以及

$$\left.\begin{aligned}\frac{2q}{\beta}\frac{\partial w_{11}}{\partial x}&=\frac{2q\pi}{a\beta}c_{11}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\\ \frac{2q}{\beta}\frac{\partial w_{21}}{\partial x}&=\frac{4q\pi}{a\beta}c_{21}\cos\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\end{aligned}\right\}\tag{7-7}$$

于是

$$D\left(\frac{\pi^4}{a^4}+\frac{2\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)c_{11}\sin\frac{\pi x}{a}-\omega^2\tilde{m}c_{11}\sin\frac{\pi x}{a}+$$

$$\frac{2q\pi}{a\beta}\left(c_{11}\cos\frac{\pi x}{a}+2c_{21}\cos\frac{2\pi x}{a}\right)=0\tag{7-8}$$

为消除上式中的正弦和余弦项，用 $\sin\frac{\pi x}{a}$ 乘以(7-8)式，并完成 $x=0$ 到 $x=a$ 的积分，则得

$$\left[\frac{aD}{2}\left(\frac{\pi^4}{a^4}+\frac{2\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)-\frac{\omega^2\tilde{m}a}{2}\right]c_{11}-\frac{8q}{3\beta}c_{21}=0\tag{7-9}$$

同样地，对于 w_{21}：

$$\begin{aligned}D\nabla^4w_{21}&=D\left(\frac{\partial^4w_{21}}{\partial x^4}+\frac{2\partial^4w_{21}}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4w_{21}}{\partial y^4}\right)\\&=D\left(\frac{16\pi^4}{a^4}+\frac{8\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)c_{21}\sin\frac{2\pi x}{b}\end{aligned}\tag{7-10}$$

$$\tilde{m}\ddot{w}_{21}=-\omega^2\tilde{m}c_{21}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\tag{7-11}$$

以及

$$\left.\begin{aligned}\frac{2q}{\beta}\frac{\partial w_{11}}{\partial x}&=\frac{2q\pi}{a\beta}c_{11}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\\ \frac{2q}{\beta}\frac{\partial w_{21}}{\partial x}&=\frac{4q\pi}{a\beta}c_{21}\cos\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\end{aligned}\right\}\tag{7-12}$$

于是

$$D\left(\frac{16\pi^4}{a^4}+\frac{8\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)c_{21}\sin\frac{2\pi x}{a}-\omega^2\tilde{m}c_{21}\sin\frac{2\pi x}{a}+$$

$$\frac{2q\pi}{a\beta}\left(c_{11}\cos\frac{\pi x}{a}+c_{21}\cos\frac{2\pi x}{a}\right)=0\tag{7-13}$$

用 $\sin\frac{2\pi x}{a}$ 乘以(7-13)式，并完成 $x=0$ 到 $x=a$ 的积分，则得：

$$\frac{aD}{2}\left(\frac{16\pi^4}{a^4}+\frac{8\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)c_{21}-\frac{\omega^2\widetilde{m}a}{2}c_{21}+\frac{8q}{3\beta}c_{11}=0 \quad (7\text{-}14)$$

(7-9)和(7-14)式构成了二自由度的联立方程组。要求联立方程组有解，则必须它们的系数行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix} \frac{aD}{2}\left(\frac{\pi^4}{a^4}+\frac{2\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)-\frac{\omega^2\widetilde{m}a}{2} & -\frac{8q}{3\beta} \\ \frac{8q}{3\beta} & \frac{aD}{2}\left(\frac{16\pi^4}{a^4}+\frac{8\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)-\frac{\omega^2\widetilde{m}a}{2} \end{vmatrix}=0 \quad (7\text{-}15)$$

由此可求得平板的颤振临界速度和颤振频率。

若引入下列符号：

$$\left.\begin{aligned} \overline{A} &= \frac{aD}{2}\left(\frac{\pi^4}{a^4}+\frac{2\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right) \\ \overline{B} &= \frac{aD}{2}\left(\frac{16\pi^4}{a^4}+\frac{8\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right) \end{aligned}\right\} \quad (7\text{-}16)$$

以及

$$\frac{8q}{3\beta}=\frac{4\rho U^2}{3\sqrt{M^2-1}}$$

则行列式化为

$$\begin{vmatrix} \overline{A}-\frac{\omega^2\widetilde{m}a}{2} & -\frac{4\rho U^2}{3\sqrt{M^2-1}} \\ \frac{4\rho U^2}{3\sqrt{M^2-1}} & \overline{B}-\frac{\omega^2\widetilde{m}a}{2} \end{vmatrix}=0 \quad (7\text{-}17)$$

展开

$$\frac{\widetilde{m}^2a^2}{4}\omega^4-(\overline{A}+\overline{B})\frac{\widetilde{m}a}{2}\omega^2+\overline{A}\,\overline{B}+\frac{16\rho^2U^4}{9(M^2-1)}=0 \quad (7\text{-}18)$$

由上式知，ω^2 的解为

$$\omega^2 = \frac{(\bar{A}+\bar{B})\frac{\tilde{m}a}{2} \pm \sqrt{\left[(\bar{A}+\bar{B})\frac{\tilde{m}a}{2}\right]^2 - \bar{A}\bar{B}\tilde{m}a^2 - \frac{16\rho^2\tilde{m}^2a^2U^4}{9(M^2-1)}}}{\frac{\tilde{m}^2a^2}{2}} \tag{7-19}$$

与升力面颤振相同，认为接近颤振临界点时，振动是等幅的简谐运动，(7-19)式的根号项应等于零，于是颤振频率为

$$\omega_f = \sqrt{\frac{\bar{A}+\bar{B}}{\tilde{m}a}} \tag{7-20}$$

由(7-19)式中的根号项等于零，则可求得与 ω_f 对应的颤振临界速度：

$$U_f = \left[\frac{9(M^2-1)}{16\rho^2\tilde{m}^2a^2}\left\{\left[(\bar{A}+\bar{B})\frac{\tilde{m}a}{2}\right]^2 - \bar{A}\,\bar{B}\tilde{m}^2a^2\right\}\right]^{1/4} \tag{7-21}$$

当飞行速度小于 U_f 时，(7-19)式具有两个实根，此时的振动不再是简谐运动。若速度为零，这两个实根就是真空中的弯曲振动固有频率。当速度达到 U_f 时，上述联立方程式的解就是两个相等的实根，即得一个频率 ω_f。当速度大于 U_f 时，(7-19)式的解变成复数形式，(7-4)式的弯曲形态一个是发散的，一个是收敛的。因此，安全的飞行速度应当小于 U_f。

值得指出的是，(7-20)和(7-21)式的结果是偏于保守的。

为了获得更准确的结果，需要用到四个自由度，其弯曲形态为

$$\left.\begin{aligned}
w_{11} &= c_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}e^{i\omega t}\\
w_{21} &= c_{21}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}e^{i\omega t}\\
w_{31} &= c_{31}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}e^{i\omega t}\\
w_{41} &= c_{41}\sin\frac{4\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}e^{i\omega t}
\end{aligned}\right\} \tag{7-22}$$

与二自由度情况类似，可得到四个方程式：

$$
\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{aD}{2}\left(\frac{\pi^4}{a^4}+\frac{2\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)-\frac{\omega^2\tilde{m}a}{2}\right]c_{11}-\frac{8q}{3\beta}c_{21}-\frac{8q}{15\beta}c_{41}=0\\
&\frac{8q}{3\beta}c_{11}+\left[\frac{aD}{2}\left(\frac{16\pi^4}{a^4}+\frac{8\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)-\frac{\omega^2\tilde{m}a}{2}\right]c_{21}-\frac{18q}{5\beta}c_{31}=0\\
&\frac{24q}{5\beta}c_{21}+\left[\frac{aD}{2}\left(\frac{81\pi^4}{a^4}+\frac{18\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)-\frac{\omega\tilde{m}a}{2}\right]c_{31}+\frac{64q}{7\beta}c_{41}=0\\
&\frac{64q}{15\beta}c_{11}+\frac{48q}{7\beta}c_{31}+\left[\frac{aD}{2}\left(\frac{256\pi^4}{a^4}+\frac{32\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)-\frac{\omega^2\tilde{m}a}{2}\right]c_{41}=0
\end{aligned}\right\}
\tag{7-23}
$$

同样地，引入下列符号：

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{A}&=\frac{aD}{2}\left(\frac{\pi^4}{a^4}+\frac{2\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)\\
\overline{B}&=\frac{aD}{2}\left(\frac{16\pi^4}{a^4}+\frac{8\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)\\
\overline{C}&=\frac{aD}{2}\left(\frac{81\pi^4}{a^4}+\frac{18\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)\\
\overline{D}&=\frac{aD}{2}\left(\frac{256\pi^4}{a^4}+\frac{32\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)
\end{aligned}\right\}
\tag{7-24}
$$

则得(7-23)式的系数行列式等于零，

$$
\begin{vmatrix}
\overline{A}-\frac{\omega^2\tilde{m}a}{2} & -\frac{8q}{3\beta} & 0 & -\frac{8q}{15\beta}\\
\frac{8q}{3\beta} & \overline{B}-\frac{\omega^2\tilde{m}a}{2} & -\frac{18q}{5\beta} & 0\\
0 & \frac{24q}{5\beta} & \overline{C}-\frac{\omega^2\tilde{m}q}{2} & \frac{64q}{7\beta}\\
\frac{64q}{15\beta} & 0 & \frac{48q}{7\beta} & \overline{D}-\frac{\omega^2\tilde{m}a}{2}
\end{vmatrix}=0
\tag{7-25}
$$

将此行列式展开，便可求得颤振频率(ω_f)和颤振临界速度(U_f)的准确解。

若蒙皮承受平面轴向载荷(图 7-2)，令 N_x 为 x 方向单位长度上

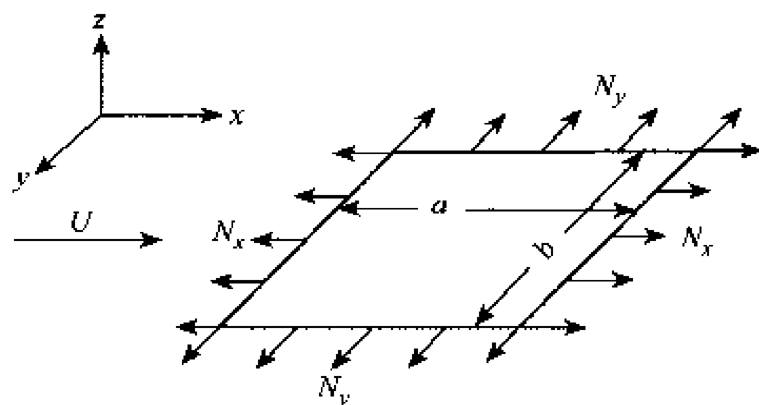


图 7-2 受平面轴向载荷的平板

的均布载荷，N_y 为 y 方向单位长度上的均布载荷(其中 N_x 和 N_y 使蒙皮受压为正)，则(7-1)式改写为：

$$D\nabla^4 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{N_y \partial^2 w}{\partial y^2} + \tilde{m}\ddot{w} + \frac{2q}{\beta}\sum \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (7\text{-}26)$$

对于二自由度，弯曲形态与(7-4)式相同。不过在运动方程式中需引进 $\frac{N_x \partial^2 w}{\partial x^2}$ 和$\frac{N_y \partial^2 w}{\partial y^2}$。对于 w_1：

$$\left.\begin{aligned} N_x \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} &= -c_{11}\frac{\pi^2}{a^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}e^{i\omega t}N_x \\ N_y \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} &= -c_{11}\frac{\pi^2}{a^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}e^{i\omega t}N_y \end{aligned}\right\} \quad (7\text{-}27)$$

对于 w_2：

$$\left.\begin{aligned} N_x \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} &= -c_{21}\frac{4\pi^2}{a^2}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}e^{i\omega t}N_x \\ N_y \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} &= -c_{21}\frac{\pi^2}{b^2}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}e^{i\omega t}N_y \end{aligned}\right\} \quad (7\text{-}28)$$

对(7-27)式先除以 $\sin\frac{\pi y}{b}e^{i\omega t}$，再乘 $\sin\frac{\pi x}{a}$，并完成 $x=0$ 到 $x=a$ 的积分；对(7-28) 式除以 $\sin\frac{\pi y}{b}e^{i\omega t}$，再乘 $\sin\frac{2\pi x}{a}$，并完成 $x=0$ 到

$x=a$ 的积分。于是,得到对应于(7-9)和(7-14)式的联立方程式:

$$\left.\begin{aligned}&\left[\frac{aD}{2}\left(\frac{\pi^4}{a^4}+\frac{2\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)-\frac{\pi^2}{2a}-\frac{\pi^2a}{2b^2}-\frac{\omega^2\widetilde{m}a}{2}\right]c_{11}-\frac{8q}{3\beta}c_{21}=0\\&\left[\frac{aD}{2}\left(\frac{16\pi^4}{a^4}+\frac{8\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)-\frac{2\pi^2}{a}-\frac{\pi^2a}{2b^2}-\frac{\omega^2ma}{2}\right]c_{21}+\frac{8q}{3\beta}c_{11}=0\end{aligned}\right\}$$

(7-29)

上式的系数行列式应等于零。若引入下列符号

$$\left.\begin{aligned}\overline{A}_N&=\frac{aD}{2}\left(\frac{\pi^4}{a^4}+\frac{2\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)-\frac{\pi^2}{2a}-\frac{\pi^2a}{2b^2}\\\overline{B}_N&=\frac{aD}{2}\left(\frac{16\pi^4}{a^4}+\frac{8\pi^4}{a^2b^2}+\frac{\pi^4}{b^4}\right)-\frac{2\pi^2}{a}-\frac{\pi^2a}{2b^2}\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}30)$$

以及 $\dfrac{8q}{3\beta}=\dfrac{4\rho U^2}{3\sqrt{M^2-1}}$,则

$$\begin{vmatrix}\overline{A}_N-\dfrac{\omega^2\widetilde{m}a}{2} & -\dfrac{4\rho U^2}{3\sqrt{M^2-1}}\\ \dfrac{4\rho U^2}{3\sqrt{M^2-1}} & \overline{B}_N-\dfrac{\omega^2\widetilde{m}a}{2}\end{vmatrix}=0\qquad(7\text{-}31)$$

展开,

$$\frac{\widetilde{m}^2a^2}{4}\omega^4-(\overline{A}_N+\overline{B}_N)\frac{\widetilde{m}a}{2}\omega^2+\overline{A}_N\overline{B}_N+\frac{16\rho^2U^4}{9(M^2-1)}=0$$

(7-32)

则得

$$\omega^2=\frac{(\overline{A}_N+\overline{B}_N)\dfrac{\widetilde{m}a}{2}+\sqrt{\left[(\overline{A}_N+\overline{B}_N)\dfrac{\widetilde{m}a}{2}\right]^2-\widetilde{m}^2a^2\left[\overline{A}_N\overline{B}_N-\dfrac{16\rho^2U^4}{9(M^2-1)}\right]}}{\dfrac{\widetilde{m}^2a^2}{2}}$$

(7-33)

为保持等幅的简谐运动,(7-33)式的根号应等于零。因此,可求得颤振频率:

$$\omega_f = \sqrt{\frac{\bar{A}_N + \bar{B}_N}{\widetilde{m}a}} \tag{7-34}$$

对应于 ω_f 的颤振临界速度为

$$U_f = \left[\frac{a(M^2-1)}{16\rho^2 m^2 a^2}\left\{\left[(\bar{A}_N + \bar{B}_N)\frac{\widetilde{m}a}{2}\right]^2 - \bar{A}_N\bar{B}_N\widetilde{m}^2a^2\right\}\right]^{1/4} \tag{7-35}$$

同样地,二自由度的结果是偏于保守的。为求得更为准确的结果,需要采用四个自由度。

以上考察了简支边的情况。对于边界固支时,应对弯曲形态进行简单的修正,即:

$$w = c_{mn}\left(1 - \cos\frac{m\pi x}{a}\right)\left(1 - \cos\frac{n\pi y}{b}\right)e^{i\omega t} \tag{7-36}$$

$$(m, n = 2, 4, 6, \cdots)$$

如果沿 x 方向的边缘是固支的,而沿 y 方向的边缘是简支的,则弯曲形态表示如下:

$$w = c_{mn}\left(1 - \cos\frac{m\pi x}{a}\right)\left(\sin\frac{n\pi}{b}\right)e^{i\omega t}$$

$$(m = 2, 4, 6, \cdots, n = 1, 3, 5, \cdots) \tag{7-37}$$

最后,还要指出的是:当超音速流的马赫数的最小值超过($\sqrt{2} < M > 2$)的范围时,线性超音速定常气动力理论能给出良好的近似结果。

§ 2. 半无限长平板

无论是简支边条件还是固支边条件,对于具有轴向载荷的半无限长平板(图 7-3),其运动方程式可以表示为:

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \widetilde{m}\ddot{w} = -2\rho a\dot{w} - \rho a U\frac{\partial w}{\partial x} \tag{7-38}$$

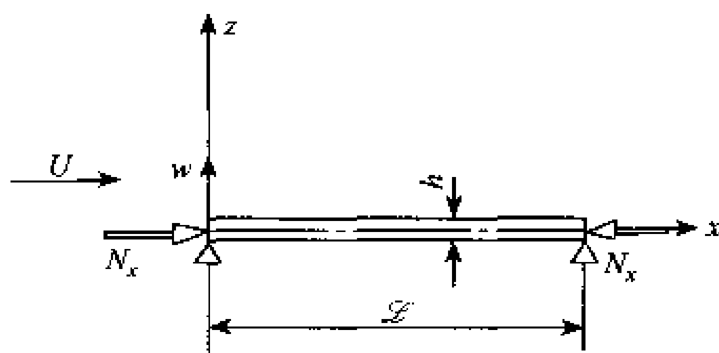


图 7-3　简支半无限长平板

气动力载荷是由活塞理论给定的，它由上式右边的两项组成。其中阻尼项乘以 2，是设板下面的静止空气提供的阻尼值与上表面相等之故。轴向载荷用 N_x 表示（它等于文献[58]中的 σh）。

令
$$w=\bar{w}(x)e^{\alpha t} \tag{7-39}$$

并引入无因次坐标 $\xi=\frac{x}{\mathscr{L}}$，则(7-38)式变成无因次的形式：

$$\frac{d^4\bar{w}}{d\xi^4}+\frac{N_x\mathscr{L}^2}{D}\frac{d^2\bar{w}}{d\xi^2}+\frac{\rho aU\mathscr{L}^3}{D}\frac{d\bar{w}}{d\xi}+\left(\frac{2\rho a\mathscr{L}^4}{D}\alpha+\frac{m\mathscr{L}^4}{D}\alpha^2\right)\bar{w}=0 \tag{7-40}$$

一般，α 为复数，即 $\alpha=\beta+i\omega$。就稳定和不稳定之间的临界情况，确定 U 的大小，即让 β 等于零，或者由负值变为正值。

若引入下列参数：

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \frac{N_x\mathscr{L}^2}{D} \\ \lambda &= \frac{\rho aU\mathscr{L}^3}{D} \\ K &= \frac{2\rho a\mathscr{L}^4}{D}\alpha+\frac{m\mathscr{L}^4}{D}\alpha^2=\pi^4 g_a\frac{\alpha}{\omega_r}+\pi^4\frac{\alpha^2}{\omega_r^2} \end{aligned}\right\} \tag{7-41}$$

则(7-40)式简写为

$$\frac{d^4\bar{w}}{d\xi^4}+R_x\frac{d^2\bar{w}}{d\xi^2}+\lambda\frac{d\bar{w}}{d\xi}+K\bar{w}=0 \tag{7-42}$$

式中　$K = -\pi^4 g_a \dfrac{\alpha}{\omega_r} - \pi^4 \dfrac{\alpha^2}{\omega_r^2}$

以及　$\omega_r = \pi^2 \sqrt{\dfrac{D}{m\mathscr{L}^4}}$ 为半无限长简支平板的一阶固有频率；

$g_a = \dfrac{2\rho U}{m\omega_r} \dfrac{M^2 - 2}{(M^2 - 1)^{3/2}}$ 为基于 ω_r 的阻尼系数。

若令 $\overline{w} = e^{p\xi}$，则得特征方程式

$$p^4 + R_x p^2 + \lambda p + k = 0 \tag{7-43}$$

上式具有如下的四个根：

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\varepsilon + b \\ p_2 &= -\varepsilon - b \\ p_3 &= \varepsilon + ic \\ p_4 &= \varepsilon - ic \end{aligned}\right\} \tag{7-44}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} b &= \sqrt{\frac{\lambda}{4\varepsilon} - \left(\varepsilon^2 + \frac{R_x}{2}\right)} \\ c &= \sqrt{\frac{\lambda}{4\varepsilon} + \left(\varepsilon^2 + \frac{R_x}{2}\right)} \\ k &= \left(2\varepsilon^2 + \frac{R_x}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{16\varepsilon^2} \end{aligned}\right\} \tag{7-45}$$

以及（上式中 k）

（ε 为 x 方向的间距）。

于是，挠度幅值表示为

$$w = A_1 e^{p_1 \xi} + A_2 e^{p_2 \xi} + A_3 e^{p_3 \xi} + A_4 e^{p_4 \xi} \tag{7-46}$$

式中的系数 A_i 由边界条件确定。

对于简支边

$$w(0) = \overline{w}''(0) = \overline{w}(1) = \overline{w}''(1) = 0$$

对于固支边

$$w(0) = \overline{w}'(0) = \overline{w}(1) = \overline{w}'(1) = 0$$

由(7-46)式，得到下列的稳定性行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 & p_4^2 \\ e^{p_1} & e^{p_2} & e^{p_3} & e^{p_4} \\ p_1^2 e^{p_1} & p_2^2 e^{p_2} & p_3^2 e^{p_3} & p_4^2 e^{p_4} \end{vmatrix} = 0 \tag{7-47}$$

展开之，

简支边

$$16i\varepsilon^2 bc\cosh 2\varepsilon - (b+\mathrm{i}c)^2[4\varepsilon^2-(b-\mathrm{i}c)^2]\cosh(b+\mathrm{i}c) + (b-\mathrm{i}c)^2[4\varepsilon^2-(b+\mathrm{i}c)^2]\cosh(b-\mathrm{i}c) = 0 \tag{7-48}$$

固支边

$$4ibc\cosh 2\varepsilon + [-4\varepsilon^2+(b-\mathrm{i}c)^2]\cosh(b+\mathrm{i}c) - [-4\varepsilon^2+(b+\mathrm{i}c)^2]\cosh(b-\mathrm{i}c) = 0 \tag{7-49}$$

利用下述方法，可解这些稳定性方程式。

对于给定的 R_x 值，选取 λ 值；再改变 $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$，直到满足稳定性方程式为止。一旦求得 ε 之后，按(7-45)式的最后一式，确定 $k = k_1 + ik_2$。于是，α 的解表示为

$$\alpha = \beta + \mathrm{i}\omega = -\frac{\omega_r g_a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_r g_a}{2}\right)^2 + \frac{\omega_r^2}{\pi^2}(k_1 + \mathrm{i}k_2)} \tag{7-50}$$

研究上式可知，怎样的 g_a 才能使 β 等于零。

对于颤振($\beta \geqslant 0$)，g_a 应满足下列条件：

$$\pi^4 g_a^2 > \frac{k_2^2}{-k_1} \tag{7-51}$$

因此，颤振频率为

$$\omega_f = \frac{\sqrt{-k_1}}{\pi^2}\omega_r \tag{7-52}$$

其中 k_1 永远取负值。

文献[58]求得了无轴向载荷(即 $R_x = 0$)时的颤振边界，如图7-4所示。图上的实线表示 $R_x = 0$ 时的颤振边界，水平虚线分别对应着简支边和固支边的 $\frac{\lambda}{\pi^4} = 3.52$ 和 6.52，其中略去了正比于 $\dot{w}$ 的阻

尼项。实际上,g_a 值往往小于 0.5,因此实际的颤振边界与水平虚线之间差别甚小。在作板的颤振分析时,可以不考虑阻尼项。

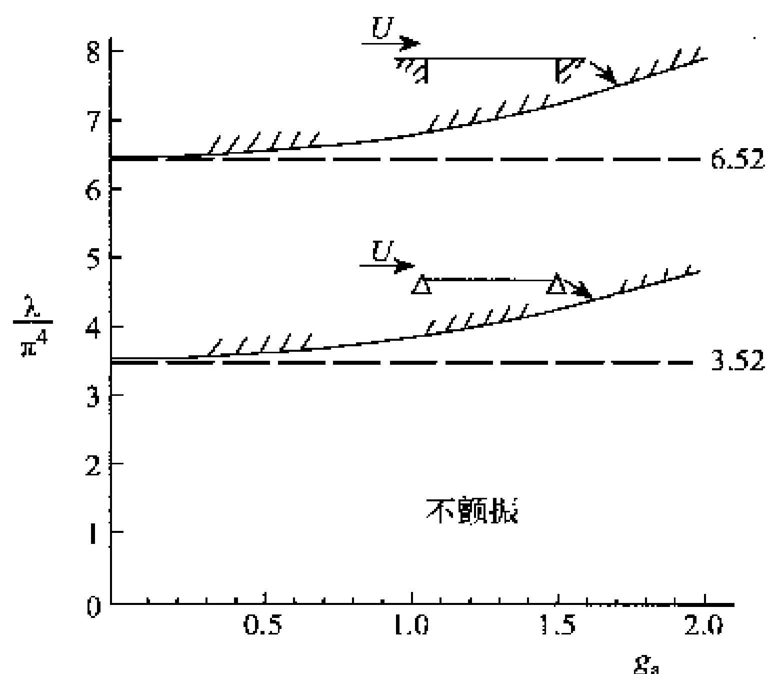


图 7-4　半无限长的颤振边界($R_x = 0$)

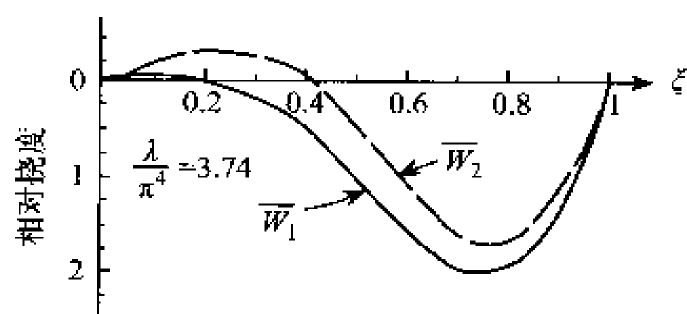
若略去阻尼项,分析就变得简单了。当 ϵ、λ 和 R_x 已知后,特征值 k 可按(7-45)式的最后一式计算,则颤振频率可按

$$\omega_f = \frac{\sqrt{k}\omega_r}{\pi^2}$$

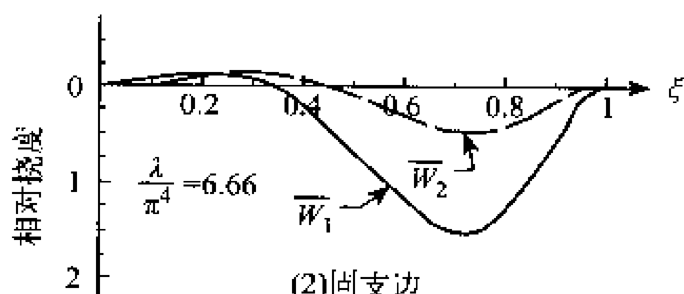
求得。

半无限长板的颤振典型形态对于简支边和固支边等两种情况如图 7-5 所示。颤振形态包含着实部($\overline{w}_1$)和虚部($\overline{w}_2$)两部分。横向挠度几乎集中在板的背面,且为明显的二阶形态分量。

具有轴向载荷的半无限长平板颤振边界如图 7-6 所示,分别给出了简支边和固支边条件下,颤振时的 λ 值与 γ 的曲线关系(其中 $\gamma = R_x/\pi^2$)。它对于研究板的大挠度特性,极其有用。



(1)简支边



(2)固支边

图 7-5　半无限长板的颤振形态[58]

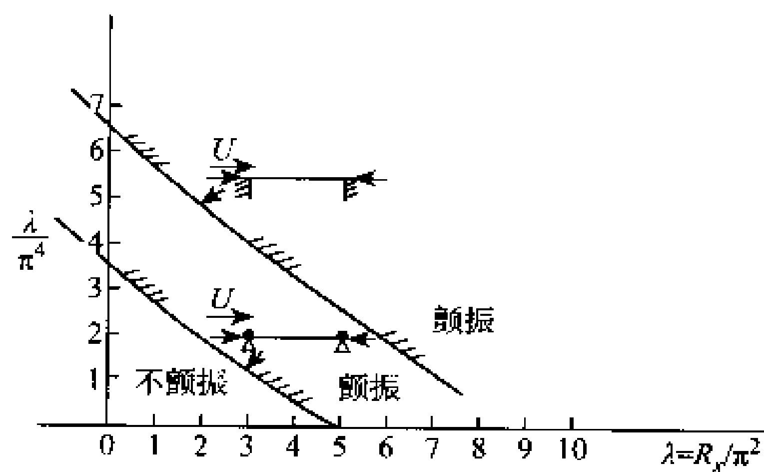


图 7-6　具有轴向载荷的平板颤振边界($R_x\neq0$)[58]

第八章 空气动力加热的影响

在茫茫的夜空，陨石以极高的速度进人包围地球的大气层，与稠密的大气摩擦发热而拖着一束带光亮的尾巴，划破长空，这就是人们习称的流星。1976 年 3 月 8 日下午，在我国吉林地区下了一次世界历史上罕见的陨石雨，给科研工作者送来了从天而降的珍贵礼品。载人的宇宙飞船遨游太空之后，完成了重大的科学考察任务重返大气层时，由于速度极高，飞船的最外层结构材料熊熊燃烧，像一团火球冲向地面。这都是我们用肉眼看到或者听说过的空气动力加热而导致的自燃现象。

§1. 空气动力加热

众所周知，当气流受到阻滞时，温度就要升高；而且，阻滞愈严重，温度升高得愈剧烈。这种现象便称为空气动力加热。在亚音速流动中，温度的升高尚不显著。但在超音速流中，温度的升高则很可观；而当飞行速度达到高超音速时，温度的升高甚至会达到使金属熔化的程度。

通常，气流在下列三种情况下受到阻滞：

1. 气流流近物体驻点；

2. 气流流经激波；

3. 气流在附面层内流动。

其中以附面层内的空气动力加热最为严重。

在附面层内，由于空气存在着粘性，气流速度从外部向内减慢，直至物体表面变为零。于是，附面层底部的气流温度增大到驻点温

度，即

$$T_s = (1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2) T_{\infty} \tag{8-1}$$

式中，T_s 称为驻点温度，M_{∞}、T_{∞} 分别表示附面层边界上的马赫数和温度，γ 为比热比，对于空气 $\gamma=1.4$。

在附面层的底部，相对于附面层边界的气流温度升高为：

$$\Delta T_a = T_s - T_{\infty} = \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2 T_{\infty} = 0.2 M_{\infty}^2 T_{\infty} \tag{8-2}$$

这里所说的温度即绝热壁温度。

由(8-2)式知，温度的升高只取决于附面层边界的温度和马赫数。当 $M_{\infty}=2$ 时，温度的升高为 T_{∞} 的 80%；当 $M_{\infty}=5$ 时，温度增加到 T_{∞} 的 5 倍。具体说来，若 $T_{\infty}=0$ ℃(=273 K)，$M_{\infty}=2$ 时，附面层底部的温度达到 220 ℃左右；$M_{\infty}=5$ 时，则达到 1 350 ℃左右。此时，铝合金早已熔化了；而对于钢来说，虽然尚未熔化，但也烧红了。

实际上，附面层内的温度低于按(8-2)式求得的数值。为此，我们引入一个无量纲的系数，称为温度恢复系数：

$$r = \frac{T_{aw} - T_{\infty}}{T_s - T_{\infty}} \tag{8-3}$$

其中，T_{aw} 为物壁绝热时，附面层底部的实际温度。r 主要是普兰特数(P_r)的函数，同时也与流动是层流还是紊流有关。

$$\left.\begin{aligned} &\text{对于层流} \\ &r = (P_r)^{\frac{1}{2}} = 0.85 \\ &\text{对于紊流} \\ &r = (P_r)^{\frac{1}{3}} = 0.9 \end{aligned}\right\} \tag{8-4}$$

因此

$$T_{aw} = rT_s + (1 - r)T_{\infty} = [1 + r(\frac{r - 1}{2})M_{\infty}^2]T_{\infty} \tag{8-5}$$

在以上的分析中，假定物壁是绝热的。实际上，总有一部分热量要传入物体内部，改变飞行器内部的工作条件，削弱结构的强度和刚度。为此，我们用 q 表示气流对物体的传热率

$$q = \alpha(T_{aw} - T_w) \tag{8-6}$$

式中，T_{aw} 为飞行器蒙皮上的真实温度。α 称为传热系数，它可表示为

$$\alpha = A\frac{c_p \cdot G}{R^n} \tag{8-7}$$

其中，$R=\dfrac{Ux}{\gamma}$，x 为物体表面上各点距前缘的坐标，U 为当地流速，γ 为动力粘性系数；c_p 为定压比热；$G=\gamma U$ 为空气流率；n 为一指数，它取决于附面层的性质，对于层流 $n=\dfrac{1}{2}$，对于紊流 $n=\dfrac{1}{5}$；A 为一系数，取决于附面层的性质和马赫数的大小，一般可取如下数值：

对于层流，$A=0.332$；对于紊流，$A=0.029\,6$。在同一流动条件下，紊流附面层对飞行器的传热远比层流附面层要大。因此，在超音速飞行时，层流流动具有对物体传热慢、温度恢复系数较小以及磨擦阻力小的特点。影响传热系数的另一个重要因素是空气流率 G。因为气流与飞行器之间的热交换主要是由于气体分子与表面壁碰撞的结果，G 愈大，表示单位时间内这种碰撞愈频繁，自然传热便愈快。因此，在极高空（例如高度大于 100 km 以上）飞行时，由于空气密度极其稀薄，即使以很高的马赫数飞行，传热问题也不严重。这就是人造卫星为什么能在极高空长期维持高速运行而不致烧毁的原因。

现在，我们以某高速歼击机为例，其航迹图如图 8-1 所示，该飞机在 $M=0.95$ 时上升到 10 675 m 的高度。然后，在此高度上加速到 $M=3.5$，在这一马赫数飞行两分钟之后，慢慢地降落到地面。图 8-2 列举了该歼击机的平均绝热壁温度随时间的变化曲线[59]。

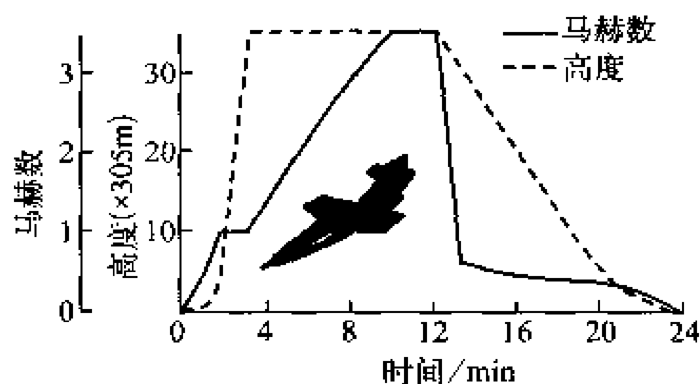


图 8-1　某歼击机的航迹图

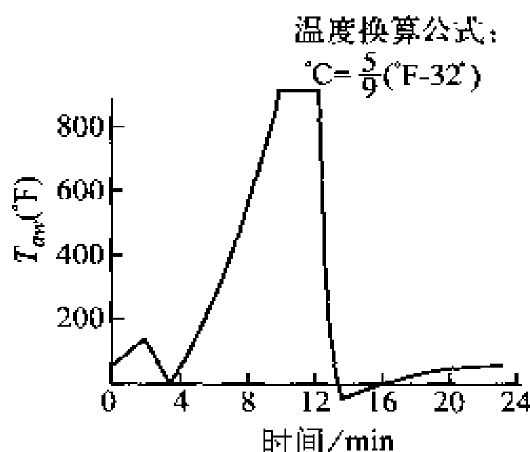


图 8-2　某歼击机的平均绝热壁温度的变化

§2. 空气动力加热的影响

由于空气动力加热通过附面层要传到飞行器的内部，经过一段时间之后，飞行器的温度与绝热壁温度 T_{aw} 相同。这样的温度升高将给飞行器结构带来不良的影响。

温度升高的第一个影响是：高温使得飞行器的结构刚度降低，具体以杨氏模量而言，随温度升高而降低的情况如图 8-3 所示。

温度升高的第二个影响是：由于气流把热量传给飞行器其温度

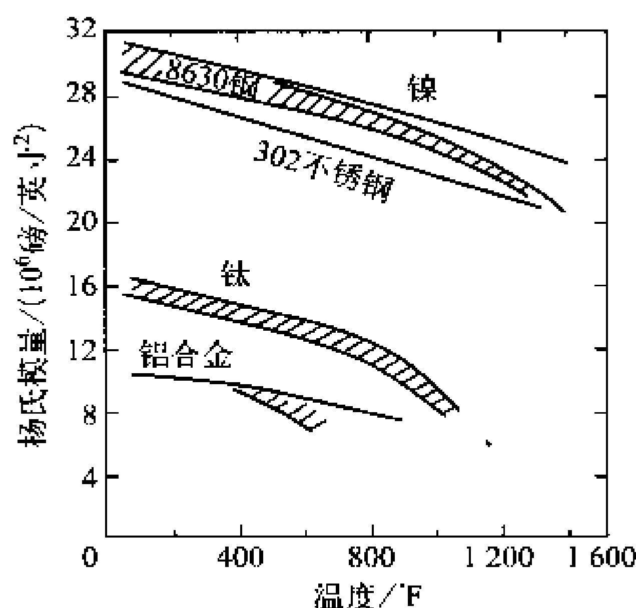


图 8-3　杨氏模量随温度的变化

换算公式：(1 磅/英寸^2)$=7.032\times10^{-2}$($\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^2}$)

升高需要一段时间，在未达到 T_{aw} 之前的过渡状态，飞行器各部分的温度不均匀，会引起很大的热应力，这从另一个方面来削弱结构。

设一飞机在高度为 15 km 处，以加速度 9.8 m/s^2 从 $M=1.4$ 增速到 $M=5.0$，据理论估算知，此时在菱形翼面上、下表面以及沿翼弦的温度分布如图 8-4 所示。机翼的前后缘受热最严重(接近于 T_{aw})，而在翼剖面中部则低得多。在翼弦上因离热源较远，温度升高更慢。于是，温度分布相差悬殊的原因在于：在机翼的前后缘处，热流从上、下、侧等三个方向传入；在中部，则只从一面传入。此外，前后缘处机翼内部的空间小，更易使其温度升高。

现在，我们以一钢制的实心菱形机翼为例。在 $t=0$ 时，还处于静止状态，随后立即作加速运动，机翼的表面部分变成高温，沿翼展方向膨胀，产生压应力，而在中心部分产生拉应力，于是致使机翼扭转刚度降低，热应力引起机翼翘曲。图 8-5 展示了该机翼在 15 250 m的高度时的有效扭转刚度与静止($t=0$)时的扭转刚度之比

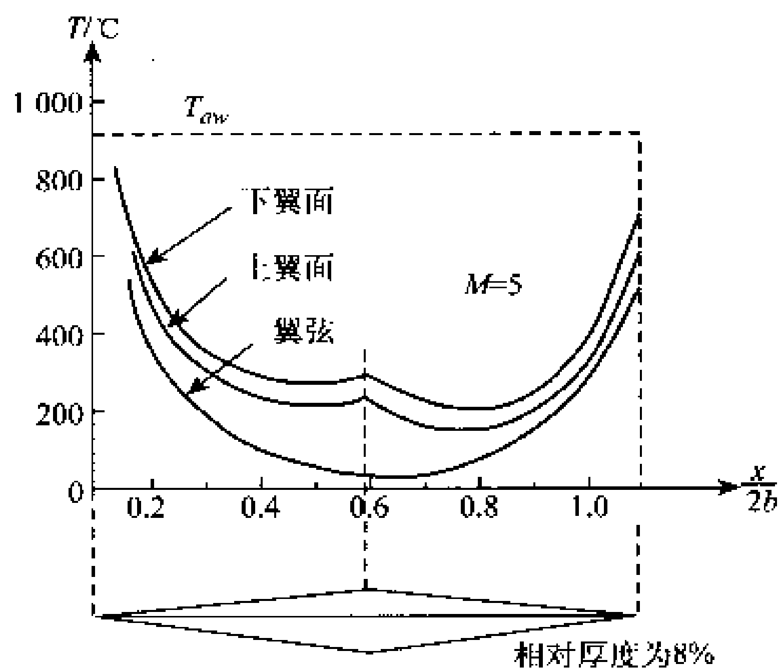


图 8-4 $M=5.0$ 时，菱形机翼的温度分布

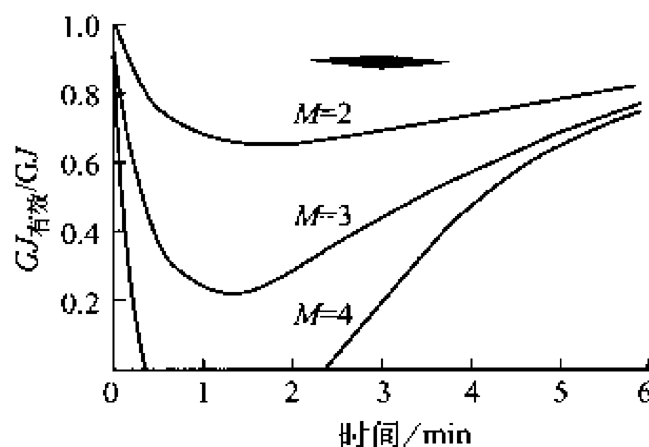


图 8-5 菱形机翼的有效刚度随时间的变化

随时间的变化。当马赫数增加时，机翼的扭转刚度大大降低。到马赫数 4 时，机翼即刻产生扭曲。图 8-6 表示该实心菱形机翼加速到马赫数 3，刚度随时间的变化过程。由图可知，当马赫数达到 3，经过

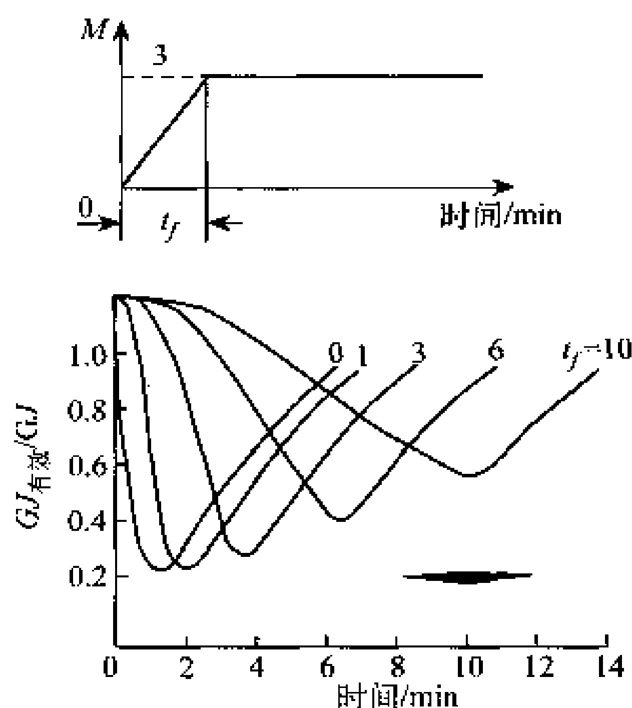


图 8-6 $M=3$ 时，菱形机翼的有效刚度变化（顶图为飞行过程）

10 分钟，机翼的扭转刚度大约降低 50%（文献[60]）。这种实心机翼因热应力引起的刚度削弱较为严重，如果把机翼改制成蒙皮—波纹板的空心结构（或者采用蜂窝结构），则是非常有利的。蒙皮的热膨胀将受到内部结构的阻制，低温部分比实心机翼小，于是热应力不太大，扭转刚度也就降低不多。

现在，我们仍以一实心菱形机翼为例，考察空气动力加热对颤振特性的影响。该菱形机翼受到空气动力加热后，在过渡状态下沿翼弦方向的温度分布如图 8-7 所示，由于存在着温差，在翼展方向便产生了热应力。在机翼的前后缘部分（高温区）出现压应力，而在中部（低温区）出现拉应力，于是降低了机翼的有效刚度。

设作用在机翼上的载荷为 $p(x,y)$，它由气动力和惯性力两部分组成；机翼的变形用 $H(x,y)$ 表示；温度分布用 $T(x,y)$ 表示。根据变分原理，可推导出关于机翼的热应力和变形之间的关系式（文献[61]）：

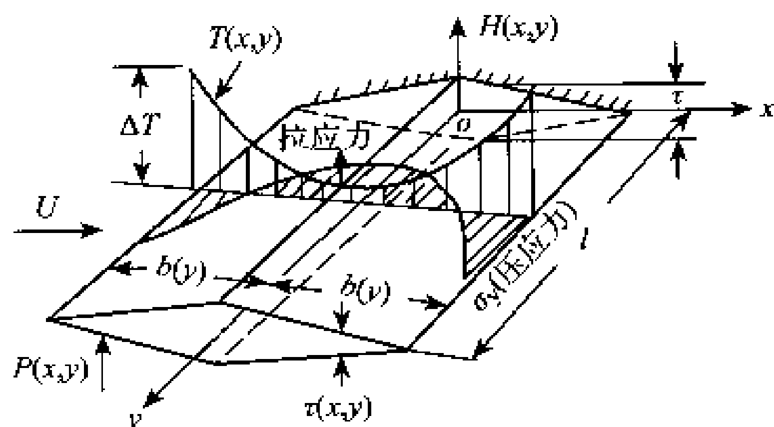


图 8-7 菱形机翼的热应力分布

$$\delta\Big[\iint \frac{D}{2}\Big[\Big(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\Big)^2-2(1-\gamma)\Big\{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}-\Big(\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}\Big)^2\Big\}\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+$$
$$\iint \frac{\tau_0}{2}\Big[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial H}{\partial x}\Big)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big(\frac{\partial^2 H}{\partial y}\Big)^2-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y}\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$
$$\iint \frac{\tau_0}{2E\tau}\Big[\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big)^2+\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big)^2-2\gamma\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+2(1+\gamma)\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\Big)^2\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$
$$\iint \tau_0\alpha T(x,y)\Big[\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint P(x,y)H(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big]=0 \tag{8-8}$$

式中，F 表示热应力的函数，它与正应力（σ_x，σ_y）以及剪应力（τ_{xy}）有如下关系：

$$\frac{\sigma_x\tau}{\tau_0}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad \frac{\sigma_y\tau}{\tau_0}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad \frac{\tau_{xy}\tau}{\tau_0}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \tag{8-9}$$

α 为线膨胀系数。

机翼的变形表示为

$$H(x,y)=h\cdot\varphi(y)+x\,\theta f_2(y) \tag{8-10}$$

设变形相对于翼弦方向是直线，则应力函数写作：

$$F(x,y)=cf_1(x,y) \tag{8-11}$$

为使 $\varphi(y)$、$f_2(y)$、$f_1(x,y)$成为满足必要条件的函数，由 c、θ 和 h 的

变分，得到

$$\delta c: c = -E\alpha\Delta T(I_2/I_1) + E(I_3/I_1)\theta^2 \tag{8-12}$$

$$\delta\theta: D_0 I_4\theta + 2\tau_0 I_3 c\theta - \iint P f_2(x) y \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{8-13}$$

$$\delta h: D_0 I_5 h - \iint P \cdot \varphi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{8-14}$$

式中，$D_0 = \dfrac{E\tau_0^3}{12(1-\gamma^2)}$（$E$ 为材料的杨氏模量，τ_0 为机翼的最大厚度，γ 为泊桑比）。

$$T(x,y) = \Delta T \cdot f_3(x) \tag{8-15}$$

以及

$$I_1 = \iint \frac{\tau_0}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right)^2 - 2\gamma\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + 2(1+\gamma)\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_2 = \iint f_3\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_3 = \iint \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 x^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \cdot f_2^2 - 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}y} f_2 x\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_4 = \iint \frac{D}{D_0}\left[2(1-\gamma)\left(\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2 f_2}{\mathrm{d}y^2}\right)x^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_5 = \iint \frac{D}{D_0}\left(\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}y^2}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{8-16}$$

若空气动力用活塞理论表示，则载荷函数为

$$P(x,y) = -2\rho a\left\{1 + \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)M\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}\right\}\left\{\frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x}\right\} - \rho_m\tau\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{8-17}$$

式中，$\tau(x,y)$为翼剖面厚度，γ 为空气比热比，t 为时间，ρ_m 为质量密度。

作为特例，设翼剖面沿翼展方向是相同的，即 $b(y)=$常数。引入

$$\left.\begin{aligned}\int_{-b}^{b}\rho_m\tau\,\mathrm{d}x &= m\\ \int_{-b}^{b}\rho_m\tau x^2\,\mathrm{d}x &= m_r\end{aligned}\right\}\tag{8-18}$$

以及

$$\left.\begin{aligned}\int_{0}^{l}\varphi_v^2\,\mathrm{d}y &= I_6\\ \int_{0}^{l}\varphi f_2\,\mathrm{d}y &= I_7\\ \int_{0}^{l}f_2^2\,\mathrm{d}y &= I_8\end{aligned}\right\}\tag{8-19}$$

将(8-12)、(8-17)式代入(8-13)、(8-14)式，则得颤振方程式：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}+\omega_h^2h+\frac{qF_0}{MUm}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+\frac{qF_1}{MUm}\frac{I_7}{I_6}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{qF_0}{Mm}\frac{I_7}{I_6}\theta=0\\ &\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega_\theta^2(1-\lambda)\theta+\omega_\theta^2\varepsilon^2\theta^3+\frac{qF_1}{MUm_r}\frac{I_7}{I_8}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+\frac{qF_2}{MUm}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{qF_1}{Mm_r}\theta=0\end{aligned}\right\}\tag{8-20}$$

式中，$q=\frac{1}{2}\rho U^2$。M 为马赫数。

$$\left.\begin{aligned}\omega_h &= \sqrt{\frac{D_0I_5}{mI_6}}(\text{弯曲固有振动频率})\\ \omega_\theta &= \sqrt{\frac{D_0I_4}{mI_8}}(\text{扭转固有振动频率})\end{aligned}\right\}\tag{8-21}$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta T_{cr} &= (D_0/2E\alpha\tau_0)(I_1I_4/I_2I_3)(\text{翘曲温度差})\\ \lambda_T &= \Delta T/\Delta T_{cr}\end{aligned}\right\}\tag{8-22}$$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{2E\tau_0}{D_0}\left(\frac{I_3^2}{I_1I_4}\right)}\tag{8-23}$$

对于菱形机翼

$$
\left.\begin{aligned}
F_0 &= 8b \\
F_1 &= -2(\gamma+1)M\delta \cdot b^2 \\
F_2 &= 8b^3/3
\end{aligned}\right\} \tag{8-24}
$$

以及

$$
\delta = \tau_0/2b
$$

若 $\theta=0$,对大的质量比情况,颤振速度的近似式为:

$$
M_f = \left[\frac{\pi\mu k_r^2 r_a^2}{(\gamma+1)\delta}\frac{1-(\omega_h/\omega_\theta)^2-\lambda_T}{(1+3\xi r_a^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{8-25}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
\mu &= \frac{m}{\pi\rho b^2}(\text{质量比}) \\
k_r &= \frac{b\omega_\theta}{a} \\
r_a^2 &= \frac{m_r}{mb^2} \\
\xi &= \frac{I_7^2}{I_6 I_8}
\end{aligned}\right\} \tag{8-26}
$$

例如:翼厚比 $\delta=0.04$,展弦比 $l/2b=2$,机翼用不锈钢制成。飞行高度为海平面。于是,

$$
\begin{aligned}
\mu &= 162 \\
k_r &= 0.295 \\
r_a^2 &= 1/6 \\
\gamma &= 1.4
\end{aligned}
$$

令 $\varphi(y)$,$f_2(y)$分别为悬臂梁的弯曲和扭转固有振型,如

$$
\varphi(y) = \cosh\alpha\bar{y} - \cos\alpha\bar{y} - 0.734(\sinh\alpha\bar{y} - \sin\alpha\bar{y})
$$

其中 $\alpha=1.875$,$\bar{y}=\dfrac{y}{l}$。

$$
f_2(y)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)
$$

且 $(\omega_h/\omega_\theta)^2=0.034$

$$\xi=0.919$$

在 $\varepsilon\theta=0, 0.2, 0.5$ 情况下，计算得到的机翼颤振速度随空气动力加热的影响如图 8-8 所示。

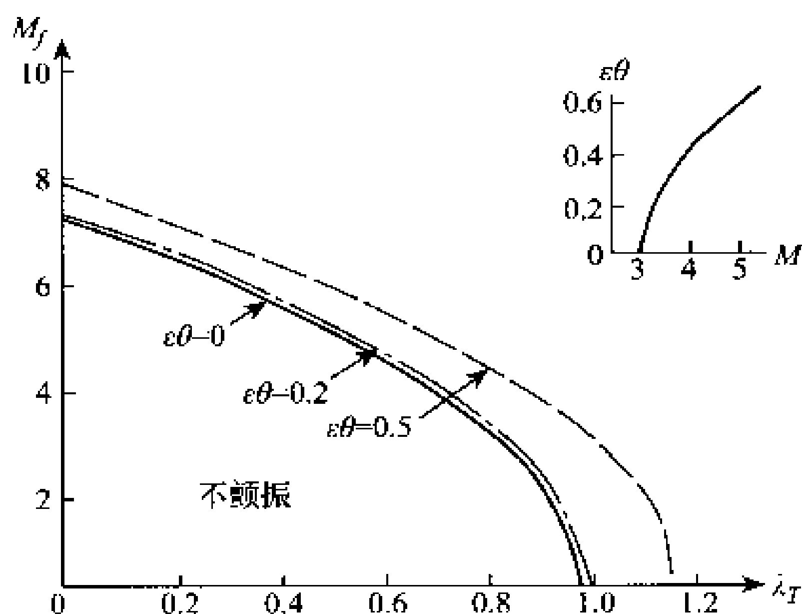


图 8-8 不锈钢制的实心菱形机翼的颤振速度受气动力加热的影响[61]

对于图 8-9 所示的翼剖面，翼厚比改写为

$$\delta = (2-e)\tau_0/2b \tag{8-27}$$

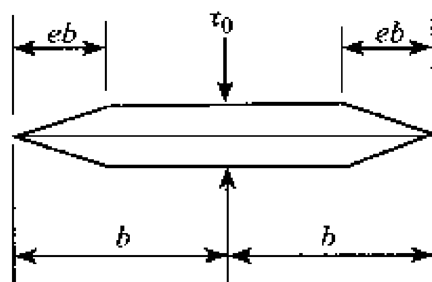


图 8-9 双楔翼型

(8-25)式仍然成立。

§3. 典型例子

此外，我们列举计算例子进一步说明空气动力加热的影响。

对于展弦比 3 的钢制蒙皮和多腹板结构的菱形机翼，当飞行速度很快加速到马赫数 4 时，颤振速度随时间的变化过程如图 8-10 所示。该机翼开始飞行后大约经过 40 s 时，颤振马赫数约降低一半。这表明在很短的时间内，该机翼将发生颤振。

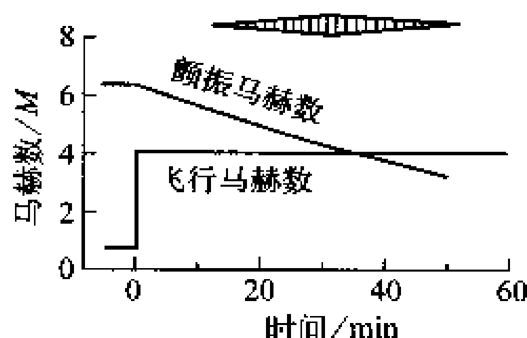


图 8-10 钢制蒙皮—多腹板结构的菱形机翼的颤振速度[62]

对于图 8-1 所示航迹图的某歼击机，计算了考虑机翼厚度和空气动力加热对弯—扭颤振边界的影响，其结果如图 8-11 所示。由图可知，若不考虑厚度和气动力加热的影响，在接近 $M=1$ 处存在一个最小的颤振余量，随后颤振余量将增大。可以认为，按跨音速颤振观点设计的升力面是满足于以更高速度飞行的。但是，在高超音速飞行时，厚度和气动力加热的影响会降低颤振余量。因此，跨音速区的颤振分析在整个速度范围内是很重要的。对于高超音速飞行器，存在着控制结构刚度的两个临界区域：

(1) 跨音速设计点。由于气动力导数在此区域达到最大，且变化剧烈，从颤振观点来考察是严重的，但至今尚未取得卓有成效的结果。

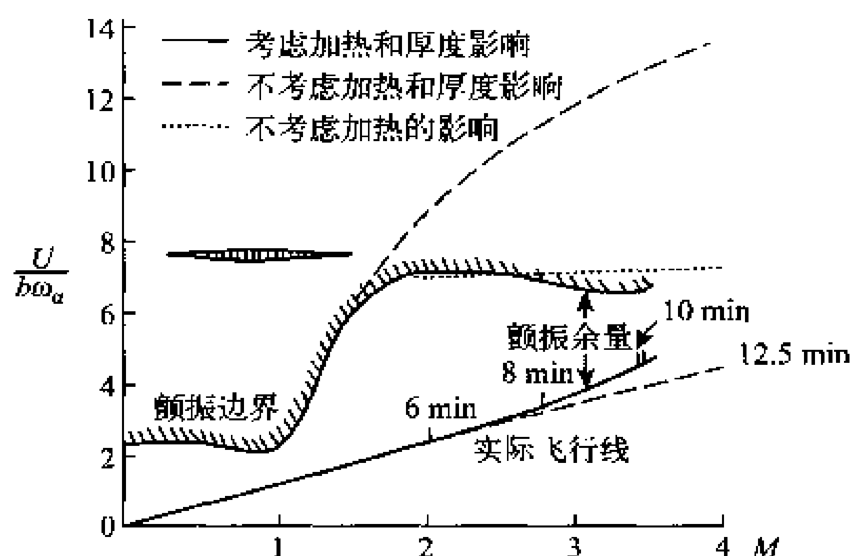


图 8-11　厚度和加热对机翼颤振边界的影响[59]

(2) 高超音速设计点。由于机翼厚度和气动力加热的效应，导致刚度的削弱，降低了颤振余量。

为了预防颤振的发生，必须提供足够的结构刚度，图 8-12 列举了某机翼为预防颤振而需要的扭转刚度（文献[63]）。图中以高度（H＝0，3 050，6 100，9 150，10 650 m）作为参数，并表示出海平面和高度为 10 650 m 的热效应修正结果。

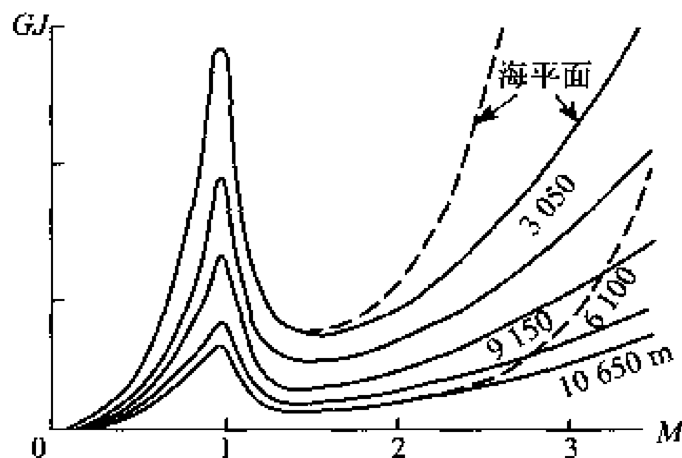


图 8-12　预防颤振所需要的扭转刚度（点划线为热效应的修正结果）

§ 4. 考虑热效应的平板颤振

在第七章，我们考察了常温下的小挠度平板颤振。现在，我们就高温引起的翘曲平板颤振（此时认为是大挠度）进行分析。

对于图 8-13 所示的系统，以 w_i 表示初始挠度，w_f 为载荷 P 和

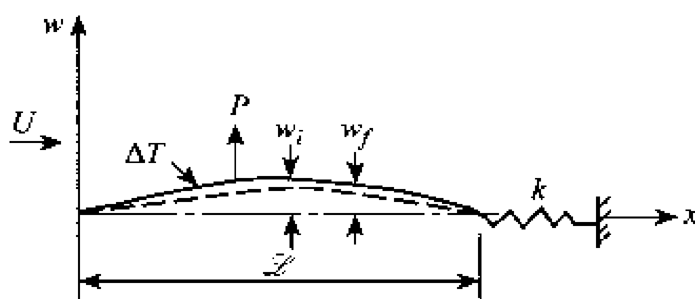


图 8-13　受热翘曲平板

热效应（对于板：温度变化是 ΔT；对于内部结构，则是 ΔT_s）作用后的挠度，k 表示内部支持结构的有效刚度的弹簧常数。因弧长大于长度 $\mathscr{L}$，有

$$\left.\begin{aligned}\lambda_i &= \frac{1}{2}\int_0^{\mathscr{L}}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x \\ \lambda_f &= \frac{1}{2}\int_0^{\mathscr{L}}\left(\frac{\partial w_f}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\end{aligned}\right\} \tag{8-28}$$

由于在半无限长的方向上的膨胀不受限制，则得轴向压应力（无因次形式）：

$$R_x = -\frac{N_x \mathscr{L}^2}{D} = \frac{Eh\mathscr{L}^2\beta_k}{D}\left[\alpha(\Delta T - \Delta T_s) - \frac{1}{2\mathscr{L}}\int_0^{\mathscr{L}}\left(\frac{\partial w_f}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2\mathscr{L}}\int_0^{\mathscr{L}}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\right] \tag{8-29}$$

式中，β_k 为考虑支持结构有效刚度的因子，按

$$\beta_k = \frac{1}{1+(Eh/\mathscr{L}k)} \tag{8-30}$$

给定。

若采用活塞理论表示作用在翘曲平板上的气动力，得到与(7-38)式类似的微分方程式

$$D\frac{\partial^4(w_f-w_i)}{\partial x^4}+\frac{Eh\beta_k}{\mathscr{L}}\left[\alpha\mathscr{L}(\Delta T-\Delta T_s)-\frac{1}{2}\int_0^{\mathscr{L}}\left(\frac{\partial w_f}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{\mathscr{L}}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right]\frac{\partial^2 w_f}{\partial x^2}+m\ddot{w}_f=-2\rho a\dot{w}_f-\rho aU\frac{\partial w_f}{\partial x} \tag{8-31}$$

令 $w_f-w_i=w_s+w$

其中，w_s 和 w 分别表示静挠度和与时间有关的挠度，由(8-31)式可分成两个方程式：

$$D\frac{\mathrm{d}^4 w_s}{\mathrm{d}x^4}+E\beta_k h\left[\alpha(\Delta T-\Delta T_s)-\frac{1}{2\mathscr{L}}\int_0^{\mathscr{L}}\left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2\mathscr{L}}\int_0^{\mathscr{L}}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right]\frac{\mathrm{d}^2 w_s}{\mathrm{d}x^2}=-\rho aU\frac{\mathrm{d}w_s}{\mathrm{d}x} \tag{8-32}$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+E\beta_k h\left[\alpha(\Delta T-\Delta T_s)-\frac{1}{2\mathscr{L}}\int_0^{\mathscr{L}}\left(\frac{\partial w_s}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2\mathscr{L}}\int_0^{\mathscr{L}}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-Eh\beta_k\left[\frac{1}{2\mathscr{L}}\int_0^{\mathscr{L}}\frac{\partial w}{\partial x}\left(2\frac{\partial w_s}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\right]\frac{\mathrm{d}^2 w_s}{\mathrm{d}x^2}+m\ddot{w}=-2\rho a\dot{w}-\rho aU\frac{\partial w}{\partial x} \tag{8-33}$$

值得指出，该式是非线的，然而，可求出近似解，在少数情况下，甚至存在准确解。

在(8-32)式中，令

$$w_s = a_1 w_1 + a_2 w_2 \tag{8-34}$$

则 w_n 满足

$$D\frac{\mathrm{d}^4 w_n}{\mathrm{d}x^4} = \omega_n^2 m w_n \tag{8-35}$$

对于 $w_i=0$ 的情况，由伽里金解可得下列的非线性齐次方程式：

$$\left\{\frac{\omega_1^2}{\omega_r^2}A_1-\frac{B_1}{\pi^2}\left[r-\frac{E\beta_k h}{2D}\left(a_1^2\frac{B_1}{\pi^2}+a_2^2\frac{B_1}{\pi^2}\right)\right]\right\}a_1-\frac{\lambda}{\pi^4}A_{21}a_2=0$$

$$\frac{\lambda}{\pi^4}A_{21}a_1+\left\{\frac{\omega_2^2}{\omega_r^2}A_2-\frac{B_2}{\pi^2}\left[r-\frac{E\beta_k h}{2D}\left(a_1^2\frac{B_1}{\pi^2}+a_2^2\frac{B_2}{\pi^2}\right)\right]\right\}a_2=0$$

(8-36)

与(7-41)式相同，$\lambda=\frac{\rho a U\mathscr{L}^3}{D}$；$\omega_r=\pi^2\sqrt{\frac{D}{m\mathscr{L}^4}}$以及

$$\left.\begin{aligned}
&A_n=\int_0^1 w_n^2\mathrm{d}\xi\quad(\xi=\frac{x}{\mathscr{L}})\\
&A_{mn}=\int_0^1 w_m\frac{\partial w_n}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi=-A_{nm}\\
&B_n=\int_0^1\left(\frac{\partial w_n}{\partial\xi}\right)^2\mathrm{d}\xi\\
&r=\frac{\Delta T-\Delta T_s}{(\Delta T-\Delta T_s)_r}\\
&(\Delta T-\Delta T_s)_r=\frac{\pi^2 D}{E\beta_k a h\mathscr{L}^2}
\end{aligned}\right\}\qquad(8\text{-}37)$$

作为(8-36)式的应用，下面给出简支边和固支边情况的振型、频率和系数以及方程式。

对于简支边

$$w_1=\sin\frac{\pi x}{\mathscr{L}},\ \omega_1=\pi^2\sqrt{\frac{D}{m\mathscr{L}^4}}$$

$$w_2=\sin\frac{2\pi x}{\mathscr{L}},\ \omega_2=4\pi^2\sqrt{\frac{D}{m\mathscr{L}^4}}$$

$$A_1=A_2=\frac{1}{2},\ A_{21}=\frac{4}{3},\ B_1=\frac{\pi^2}{2},\ B_2=2\pi^2$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[1-r+\frac{E\beta_k h}{4D}(a_1^2+4a_2^2)\right]a_1-\frac{8}{3}\frac{\lambda}{\pi^4}a_2=0\\
&\frac{8}{3}\frac{\lambda}{\pi}a_1+[16-4r+\frac{E\beta_k h}{D}](a_1^2+4a_2^2)]a_2=0
\end{aligned}\right\}\qquad(8\text{-}38)$$

对于固支边

$$w_1=1-\cos\frac{2\pi x}{\mathscr{L}},\ \omega_1=\sqrt{\frac{502D}{m\mathscr{L}^4}}$$

$$w_2=\sin\frac{\pi x}{\mathscr{L}}\sin\frac{2\pi x}{\mathscr{L}},\ \omega_2=\sqrt{3\ 810\frac{D}{m\mathscr{L}^4}}$$

$$A_1=1.566,\ A_2=0.26,\ A_{21}=2.14,$$

$$B_1=2\pi^2,\ B_2=\frac{5}{4}\pi^2$$

$$\left.\begin{aligned}&\left[8-2r+\frac{E\beta_k h}{D}\left(2a_1^2+\frac{5}{4}a_2^2\right)\right]a_1-2.14\frac{\lambda}{\pi^4}a_2=0\\&2.14\frac{\lambda}{\pi^4}a_1+\left[10.16-\frac{5}{4}r+\frac{5E\beta_k h}{8D}\left(2a_1^2+\frac{5}{4}a_2^2\right)\right]a_2=0\end{aligned}\right\}\tag{8-39}$$

根据上述公式，计算得到的结果如表 8-1 所示。

表 8-1　翘曲板计算结果

简支边			固支边		
$\frac{\lambda}{\pi^4}$	$\frac{E\beta_k h}{4D}a_1^2$	a_2^2/a_1^2	$\frac{\lambda}{\pi^4}$	$\frac{E\beta_k h}{D}a_1^2$	a_2^2/a_1^2
0	$r-1$	0	0	$r-4$	0
0.840	$0.832r-1.25$	0.05	0.994	$0.877r-3.95$	0.221
1.062	$0.667r-1.33$	0.125	1.306	$0.757r-3.79$	0.512
1.124	$0.5r-1.25$	0.250	1.520	$0.497r-3.02$	1.606

因(8-32)式可解，便可求出 w_s。同样地，能够求解(8-33)式，其结果为

$$w=b_1w_1+b_2w_2\tag{8-40}$$

假设它是小扰动，且 w 与 w_s 相比是可忽略的，则(8-33)式可线性化。

由(7-38)式的伽里金解，即得下列方程式。

对于简支边(用三阶振型)：

$$\begin{bmatrix} 1-r-\frac{\omega^2}{\omega_r^2}+\mathrm{i}g_a\frac{\omega}{\omega_r} & -\frac{8}{3}\frac{\lambda}{\pi^4} & 0 \\ \frac{8}{3}\frac{\lambda}{\pi^4} & 16-4r-\frac{\omega^2}{\omega_r^2}+\mathrm{i}g_a\frac{\omega}{\omega_r} & -\frac{24}{5}\frac{\lambda}{\pi^4} \\ 0 & \frac{24}{5}\frac{\lambda}{\pi^4} & 81-9r-\frac{\omega^2}{\omega_r^2}+\mathrm{i}g_a\frac{\omega}{\omega_r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}=0 \tag{8-41}$$

对于固支边(用二阶振型)

$$\begin{bmatrix} 8-2r-1.566\frac{\omega^2}{\omega_r^2}+\mathrm{i}1.566g_a\frac{\omega}{\omega_r} & -2.14\frac{\lambda}{\pi^4} \\ 2.14\frac{\lambda}{\pi^4} & 10.16-\frac{5}{4}r-0.26\frac{\omega^2}{\omega_r^2}+0.26\mathrm{i}g_a\frac{\omega}{\omega_r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=0 \tag{8-42}$$

展开(8-41)的行列式，则得一个实部方程式和一个虚部方程式，即

$$\left(\frac{\lambda}{\pi^4}\right)^2=\frac{-(1-r-\bar{\omega})(16-4r-\bar{\omega})(81-9r-x)+g_a^2\bar{\omega}(98-14r-3\bar{\omega})}{\frac{64}{9}(81-9r-\bar{\omega})+\frac{576}{25}(1-r-\bar{\omega})} \tag{8-43}$$

$$\left(\frac{\lambda}{\pi^4}\right)^2=\frac{-[(1-r-\bar{\omega})(97-13r-2\bar{\omega})+(16-4r-\bar{\omega})(81-9r-\bar{\omega})]+g_a^2\bar{\omega}}{\frac{64}{9}+\frac{576}{25}} \tag{8-44}$$

式中，$\bar{\omega}=\frac{\omega^2}{\omega_r^2}$(频率比)

$$r=\frac{\Delta T-\Delta T_s}{(\Delta T-\Delta T_s)r}\text{(温度比)}$$

$$\lambda=\frac{\rho a U \mathscr{L}^3}{D}\text{（板的速度参数）}$$

$$g_a=\frac{2\rho a}{m\omega_r}\text{（基于 }\omega_r\text{ 的阻尼系数）}$$

$$\omega_r=\pi^2\sqrt{\frac{D}{m\mathscr{L}^4}}\text{（参考频率，例如简支边的一阶固有频率）。}$$

求解(8-43)和(8-44)式，可得颤振条件。作为举例，$r=2$ 时的曲线如图 8-14 所示。该图曲线的相交部分作为颤振点。由此曲线的

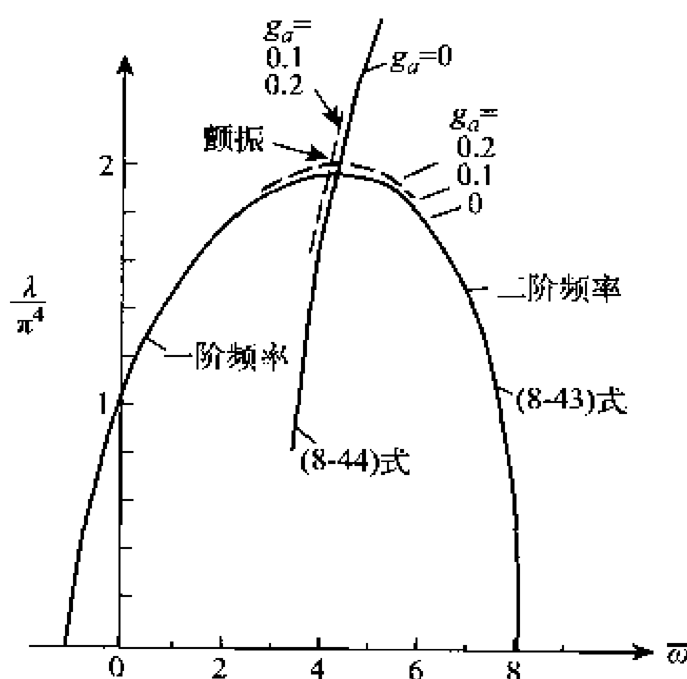


图 8-14　略去气动力阻尼影响的颤振速度参数—频率图[58]

交点可求出颤振时的 λ 值和频率。图 8-14 表明气动力阻尼(g_a)的影响是可忽略的。改变 g_a 后的颤振点，无论是 λ 还是频率，与 $g_a=0$ 曲线的最高点完全重合。此时，两个固有振动频率合而为一。这就是用以解释一自由度以上的平板颤振的频率重合理论。图 8-14 所示的两个频率，其中的一阶固有频率具有弯曲形态，二阶固有频率则

对应于扭转形态。当一阶固有频率随着速度参数(λ)的增加而增大时，二阶固有频率则随速度参数的增加而减小，到某一临界值，二者具有同一频率。该临界值就是我们所求的颤振点。

当蒙皮为长方形时，需对无限长板的颤振分析进行有限宽度修正。

此时，由板的热效应(ΔT)而引起的板的轴向载荷为$-N_x$和$-N_y$。对于平板而言，系统的微分方程式为：

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+m\ddot{w}=-2\rho a\dot{w}-\rho aU\frac{\partial w}{\partial x} \tag{8-45}$$

令 $$w=f(x)g(y)e^{\alpha t} \tag{8-46}$$

表示板的挠度，将它代入(8-45)式，乘以 $g(x)$，再沿宽度积分。并引入 $\xi=\frac{x}{\mathscr{L}}$，则得

$$\frac{\partial^4 f}{\partial \xi^4}+R_x\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+\lambda\frac{\partial f}{\partial \xi}+K\cdot f=0 \tag{8-47}$$

式中
$$\left.\begin{aligned}
R_x&=\frac{N_x\mathscr{L}^2}{D}-2\mathscr{L}^2\frac{c}{c_0}\\
\lambda&=\frac{\rho aU\mathscr{L}^3}{D}\\
K&=\frac{2\rho a\mathscr{L}^4}{D}\alpha+\frac{m\mathscr{L}^4}{D}\alpha^2-\frac{N_y\mathscr{L}^4}{D}\frac{c_1}{c_0}+\mathscr{L}^4\frac{c_2}{c_0}
\end{aligned}\right\} \tag{8-48}$$

以及
$$\left.\begin{aligned}
c_0&=\int_0^b g(y)\mathrm{d}y\\
c_1&=\int_0^b\left[\frac{\partial g(y)}{\partial y}\right]^2\mathrm{d}y\\
c_2&=\int_0^b\left[\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}\right]^2\mathrm{d}y
\end{aligned}\right\} \tag{8-49}$$

因给定了 y 方向的挠度，则二元方程式化为一元方程式，(8-47)式与(7-42)式相同，于是求得的解可用到有限宽度板上。

如前所述，阻尼项只对颤振速度有很小的影响，因此可略去不计。

若不计及阻尼，指数系数 α 写为 $\alpha=i\omega$。对于无限长的平板和有限长平板，有两个 K 的公式，即

$$\left.\begin{aligned} K_{1D} &= -\pi^4 \frac{\omega_{1D}^2}{\omega_r^2} \\ K_{2D} &= -\pi^4 \frac{\omega_{2D}^2}{\omega_r^2} - \frac{N_y \mathscr{L}^4}{D} \frac{c_1}{c_0} + \mathscr{L}^4 \frac{c_2}{c_0} \end{aligned}\right\} \tag{8-50}$$

因 $K_{1D}=K_{2D}$，则

$$\frac{\omega_{2D}^2}{\omega_r^2} = \frac{\omega_{1D}^2}{\omega_r^2} - \frac{N_y \mathscr{L}^4}{\pi^4 D} \frac{c_1}{c_0} + \frac{\mathscr{L}^4}{\pi^4} \frac{c_2}{c_0} \tag{8-51}$$

于是，从无限长平板的频率可直接求出长方形板的频率。

现在，考察一个特例。设 $g(y)$ 为：

简支边 $$g(y) = \sin \frac{\pi y}{b} \tag{8-52}$$

固支边 $$g(y) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) \tag{8-53}$$

对于(8-52)式

$$c_0 = \frac{b}{2}, \quad c_1 = \frac{\pi^2}{2b}, \quad c_2 = \frac{2\pi^4}{2b^3}$$

对于(8-53)式

$$c_0 = \frac{3}{8}b, \quad c_1 = \frac{\pi^2}{2b}, \quad c_2 = \frac{2\pi^4}{b^3}$$

其中 b 为 y 方向的板长。

第九章　颤振问题与飞行器设计的关系

现在，颤振问题已被视为高速飞行器结构设计中的一个重要问题，基于颤振要求的结构刚度指标成了主要的设计准则，仅从强度观点来考察结构设计问题已经是很不够了。

不要以为颤振是比较少见的现象，可以说近代飞行器在其发展过程中，都遇到过或者发生过某种形式的颤振。一旦颤振出现，往往导致飞机和导弹的某一部件的结构破坏，从而酿成机毁人亡的事故。

为了避免上述情况的发生，从飞行器设计开始，就应对颤振问题加以注重。在初步设计阶段，为了对不同的平面形状和结构形式，从颤振观点进行估算，以便尽快地确定结构布局。下面，我们推荐一些估算公式，供设计人员参考使用。

§1. 振动频率的估算

无论是细长机身（或弹身）还是小展弦比翼面，均是连续的弹性体。为了简化起见，我们选取其中一个剖面作为研究对象的代表，把机身或翼面化为一根均匀梁。我们把这样的方法称为特征剖面法。

众所周知，梁的弯曲振动微分方程式为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\mathrm{EI}\,\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right]+m\,\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}=0 \tag{9-1}$$

式中，EI 为梁的剖面弯曲刚度，h 为梁的弯曲变形，m 为单位长度上梁的质量。

对于图 9-1 所示的均匀梁,(9-1)式化为

$$EI\frac{d^4h}{dx^4}-m\omega^2h=0 \tag{9-2}$$

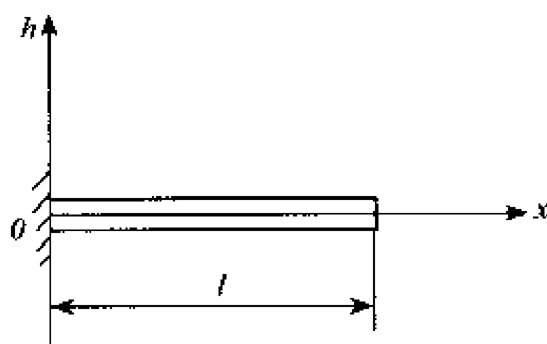


图 9-1 均匀悬臂梁

在边界条件

$$\left.\begin{aligned}h(0)&=h'(0)=0\\h''(l)&=h'''(l)=0\end{aligned}\right\} \tag{9-3}$$

下,求得各阶弯曲振动(圆)频率

$$\left.\begin{aligned}\omega_1&=(0.597)^2\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\\\omega_2&=(1.49)^2\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\\&\cdots\cdots\\\omega_n&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\quad(n\text{ 足够大})\end{aligned}\right\} \tag{9-4}$$

其中 l 是梁的长度。

梁的扭转振动微分方程式为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(GJ\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)+I_\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}=0 \tag{9-5}$$

对于均匀梁,(9-5)式化为

$$GJ\ \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}x^2} - I_\alpha\omega^2\alpha = 0 \tag{9-6}$$

在边界条件

$$\left.\begin{aligned} \alpha(0) &= 0 \\ \alpha'(l) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9-7}$$

下，求得各阶扭转振动(圆)频率为

$$\omega_\alpha = \frac{n\pi}{2l}\sqrt{\frac{GJ}{I_\alpha}} \quad (n = 1,3,5,\cdots) \tag{9-8}$$

式中，n 为振动频率的阶次，l 为梁的长度，GJ 为梁的剖面扭转刚度，I_α 为梁对弹性轴的剖面质量惯性矩。

对于自由—自由机身，作一阶弯曲振动时，其振型如图 9-2 所示。在其中间必有一个剖面可以视为一个固支点，以特征剖面的参数作为均匀悬臂梁的参数。对于机翼，以机翼根部与机身的连接处作为固支点，把半翼展的 70% 剖面作为特征剖面，以该剖面参数作为均匀梁的参数。

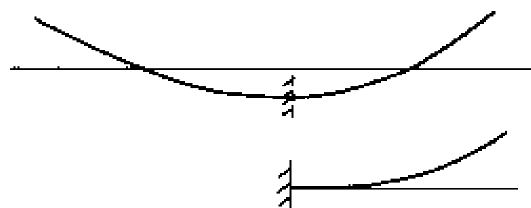


图 9-2　机身的一阶弯曲振型

我们将一飞行器的振动频率的估算结果和试验结果作一比较，如表 9-1 所示。可以看出：机身的估算结果比机翼的好，说明用梁模拟机身是合适的。而用梁来模拟机翼，则带来一定的误差，但是作为初步设计阶段，这种结果认为还是可取的。

表 9-1　振动频率的结果比较

部件	机身	机翼	
频率/(r/s)	$\omega_h/2\pi$	$\omega_h/2\pi$	$\omega_\alpha/2\pi$
估算结果	27.9	63.6	124.7
试验结果	27	56	145
估算结果/试验结果	1.033	1.136	0.860

对于操纵面的拉杆和发动机系统的燃料管道，受外力(例如发动机工作引起的)作用产生的共振频率，可按下列公式计算(文献[64])：

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{\mathrm{EI}}{m}\left(1 \pm \frac{N}{N_{kp}}\right)} \tag{9-9}$$

式中，l、EI 和 m 分别为杆(或者管)的长度、单位长度上的弯曲刚度和单位长度上的质量(对于导管，还要考虑液体的质量)。N 和 N_{kp} 分别是杆(或者管道)所受的实际拉力和临界拉力。公式中的正负号，对于拉力取正号，对于压力则取负号。拉杆(或导管)的长度，即两支点间的距离，对共振频率影响最大。为了消除拉杆和导管的共振现象，通常采取改变它们的固有振动频率的方法。

§2. 颤振速度的估算公式

对于机翼、尾翼的颤振速度估算，美、英、俄等国均有一些流行的经验公式，这里我们分别列出，设计人员可以按照自己的习惯和掌握原始数据的情况予以选用。

1. 美国的方法

西奥道生和加里克在文献[65]中，提出了二元机翼在不可压缩

性气流中的弯扭颤振临界速度估算公式。随后，阿希里和林达尔在文献[45]中，利用活塞理论提出了超音速情况的弯扭颤振临界速度公式。在毕斯普里霍夫等人的著作（文献[66]、[67]）中对上述的两经验公式作了推荐。我们根据不同的飞行速度范围，对估算公式给以分类。

(1) $0<M<0.8$ 的区域

二元机翼在不可压缩性流中的弯扭颤振临界速度（无因次形式），考虑了马赫数的修正之后，即

$$\frac{U_f}{b\omega_\alpha} \approx (1-M^2)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{m}{\pi\rho bs} \frac{r_\alpha^2}{1+2(\bar{a}+x_\alpha)}} \tag{9-10}$$

式中，M 为马赫数，ρ 为空气密度，b 为特征剖面的半弦长，s 为翼面的展向长度，a 为中弦点至弹性轴的无因次距离。x_α 为剖面重心至弹性轴的距离（见图 9-3），$x_\alpha = s_\alpha/mb$，其中 s_α 为剖面静矩。r_α 为剖面对弹性轴的回转半径，$r_\alpha = \sqrt{I_\alpha/mb^2}$，$I_\alpha$ 为单位翼展对弹性轴的质量惯性矩，m 为单位翼展上的质量。此外，式中的 $1+2(\bar{a}+x_\alpha)$ 等于气动力中心（A. C.）到重心（C. G.）的两倍距离；根号前面的 $(1-M^2)^{\frac{1}{4}}$ 是作为马赫数的修正，从而扩大了公式的应用范围。

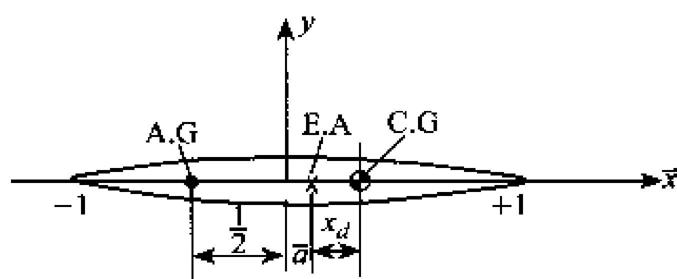


图 9-3　典型翼剖面示图

(2) $M>1.5$ 的区域

阿希里和林达尔在文献[45]中根据活塞理论，提出了超音速情况的弯扭颤振速度估算公式：

$$\frac{U_f}{b\omega_\alpha} = \frac{\left(\frac{m}{4\rho b^2}\right)M}{\sqrt{\chi}} \cdot$$

$$\sqrt{\frac{x_\alpha^2 - \left[\left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}\right)^2 \chi - 1\right] r_\alpha^2 (\chi - 1)}{\left(\frac{m}{4\rho b^2}\right) M \left\{ (1 - 2x_0 + \bar{A}) \left[\left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}\right)^2 \chi - 1\right] + x_\alpha + (1 - 2x_0 + \bar{A})^2 - \left[\frac{4}{3} - 4x_0 + 4x_0^2 + \bar{B}\right]\right.}} \tag{9-11}$$

式中 $$\chi = \frac{r_\alpha^2 - 2x_\alpha(1 - 2x_0 + \bar{A}) + \left[\frac{4}{3} - 4x_0 + 4x_0^2 + \bar{B}\right]}{r_\alpha^2 + \left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}\right)^2 \left[\frac{4}{3} - 4x_0 + 4x_0^2 + \bar{B}\right]} \tag{9-12}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{A} &= -M(\gamma + 1)\left(\frac{A_w}{8b^2}\right) \\ \bar{B} &= -M(\gamma + 1)\left[\frac{M_{w_{x_0}}}{4b^3}\right] \end{aligned}\right\} \tag{9-13}$$

其中，x_0 为机翼前缘至弹性轴的无因次距离。ω_h 和 ω_α 分别为机翼的弯曲和扭转振动（圆）频率。γ 为定压定容比热比，对于空气，$\gamma = 1.4$。A_w 和 M_w 分别表示机翼剖面的面积和对前缘的面积惯性矩。

对于厚度为 τ 的均匀平板翼，$A_w = 2b\tau$，$M_w = 2b^2\tau$。此时，(9-13)式变为

$$\left.\begin{aligned} \bar{A} &= -M(\gamma + 1)\frac{\tau}{4b} \\ \bar{B} &= -M(\gamma + 1)\frac{\tau}{2b} \end{aligned}\right\} \tag{9-14}$$

毕斯普里霍夫在文献[67]中对公式(9-11)作了修正，写成如下形式：

$$\frac{U_f}{b\omega_\alpha} = \frac{\left(\frac{m}{2\rho bs}\right)M}{\sqrt{\chi}} \cdot$$

$$\sqrt{\frac{x_\alpha^2-\left[\left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}\right)^2\chi-1\right]r_\alpha^2(\chi-1)}{\left(\frac{m}{2\rho bs}\right)M\left\{\left[-a-\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)M\delta\right]\left[\left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}\right)^2\chi-1\right]+\chi_\alpha\right\}+\left[\frac{\gamma+1}{4}M\delta\right]^2-\frac{1}{3}}}$$

(9-15)

式中

$$\chi=\frac{r_\alpha^2+2x_\alpha\left[\bar{a}+\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)M\delta\right]+\left[\frac{1}{3}+\bar{a}^2+2\bar{a}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)M\delta\right]}{r_\alpha^2+\left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}\right)^2\left[\frac{1}{3}+\bar{a}^2+2\bar{a}\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)M\delta\right]}$$

(9-16)

就菱形剖面的机翼而言，若厚度比为 δ（即 $\delta=\frac{\tau}{2b}$），剖面积 $A_w=2b^2\delta$，剖面矩 $M_w=2b^3\delta$，则

$$\left.\begin{aligned}M\frac{A_w}{2b^2}&=M\delta\\ M\frac{M_w}{b^3}&=2M\delta\end{aligned}\right\}\qquad(9\text{-}17)$$

(9-15)式考虑了厚度的影响，于是无因次的颤振临界速度视为以下六个参数的函数。这六个参数即 $\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}$，$x_\alpha$，$r_\alpha$，$\bar{a}$，$M\delta$ 以及 $M\left(\frac{m}{2\rho bs}\right)$，它是马赫数和相对密度的组合。

(9-16)式的无因次频率比，表明颤振频率与 $\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}$，$x_\alpha$，$r_\alpha$，$a$ 以及 $M\delta$ 等参数有关。

按照活塞理论的应用范围，(9-11)和(9-15)式适用于 $M>2.5$，近似地可推广到 $M>1.5$。

现在，我们以一尾翼为例。

已知：$b=0.1\ \mathrm{m}$，　$\bar{a}=-0.03$，　$x_\alpha=0.03$，

$$x_0 = 0.53, \quad r_\alpha^2 = \frac{1}{3}, \quad \left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}\right)^2 = 0.1,$$

$$\rho = 0.125\ \mathrm{kg \cdot s^2/m^4}。$$

按照上述的两个经验公式(9-10)和(9-11)，对厚度(τ)为 2、3、4、5 mm的尾翼作了计算，其结果如图 9-4 所示。该图的横坐标为马赫数 M，纵坐标为颤振临界马赫数 M_f。$M=M_f$ 的长点划线表示各种翼厚情况下的临界速度，位于该线上方的区域是颤振的安全区域。跨音速区的结果是根据亚音速和超音速的估算结果的近似延伸。在 $0.8<M<1.5$区域，情况是复杂的，需依靠试验求出结果。

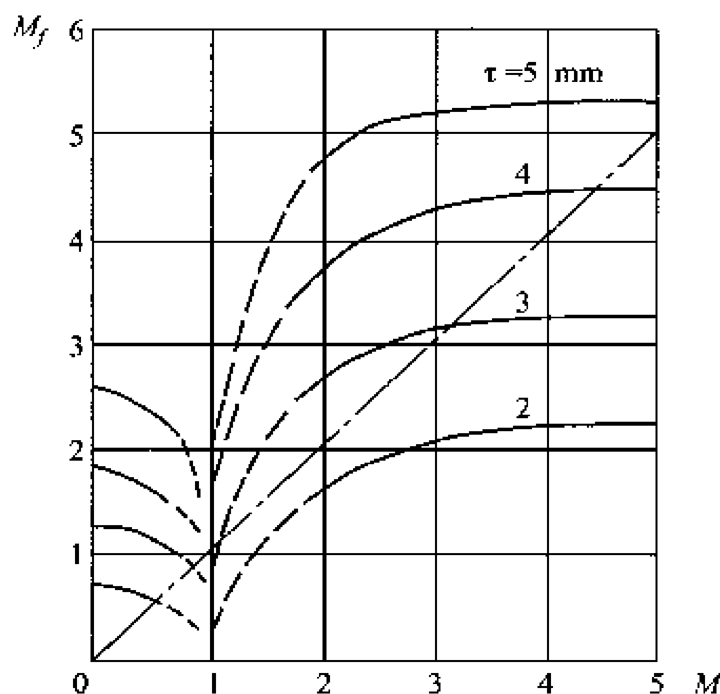


图 9-4　某尾翼的颤振速度图

此外，亚音速区的估算公式与(9-10)式略有不同，其中没有考虑机翼的展向长度(s)，即

$$\frac{U_f}{b\omega_\alpha} \approx (1-M^2)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{m}{\pi\rho b^2} \frac{r_\alpha^2}{1+2(a+x_\alpha)}}$$

由于参数的限制，只好采用上式。一般，我们建议以(9-10)式为宜。

文献[67]还将(9-15)式改写为

$$\frac{b\omega_\alpha}{a}\left(\frac{m}{2\rho bs}\right)=\sqrt{\chi}\cdot$$

$$\sqrt{\frac{M\left(\frac{m}{2\rho bs}\right)\left\{\left[-\bar{a}-\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)M\delta\right]\left[\left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}\right)^2\chi-1\right]+X_\alpha\right\}+\left[\frac{\gamma+1}{4}M\delta\right]^2-\frac{1}{3}}{x_\alpha^2-r_\alpha^2\left[\left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}\right)^2\chi-1\right]\left[\chi-1\right]}} \tag{9-18}$$

并引用文献[68]按照活塞理论算出的一系列结果，说明若干参数对 $\frac{b\omega_\alpha}{a}\left(\frac{m}{2\rho bs}\right)$ 的影响(其中 a 是音速)。剖面厚度包含在 $\delta(2\rho bs/m)$ 的参数中，它是 $M\delta$ 和 $M(m/2\rho bs)$ 的商，而与飞行速度无关。

图 9-5 表明了菱形剖面在三种厚度比的情况下，马赫数—密度

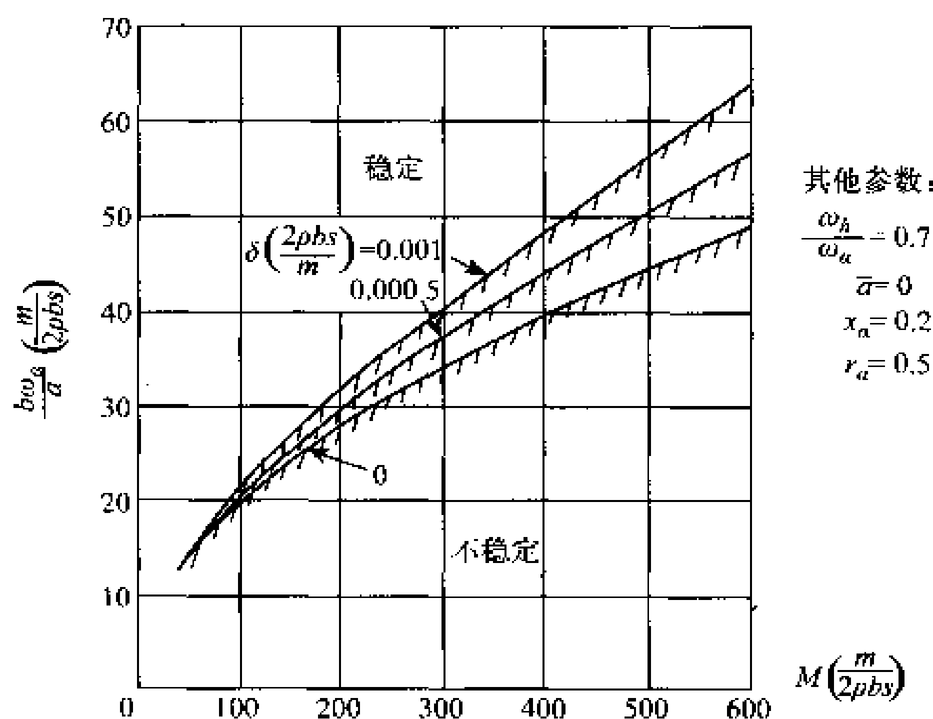


图 9-5 菱形剖面的稳定边界

参数对稳定性的影响。增大厚度比 δ，必定降低系统的稳定性。该图的纵坐标近似地按抛物线的形式随 $M(m/2\rho bs)$ 变化着。这一事实意味着飞机或者导弹在固定高度下加速到高马赫数时，终究要遇到气动弹性的不稳定性，即使它的升力面足够刚硬能够度过危险的跨音速区。

图 9-6 给出了频率比对 $\frac{b\omega_\alpha}{a}\left(\frac{m}{2\rho bs}\right)$ 的影响，在 $\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}=1$ 附近出现峰值。当 $\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}<1$ 时，增大 δ 是不利的；而当 $\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}$ 较大时，增大 δ，具有略

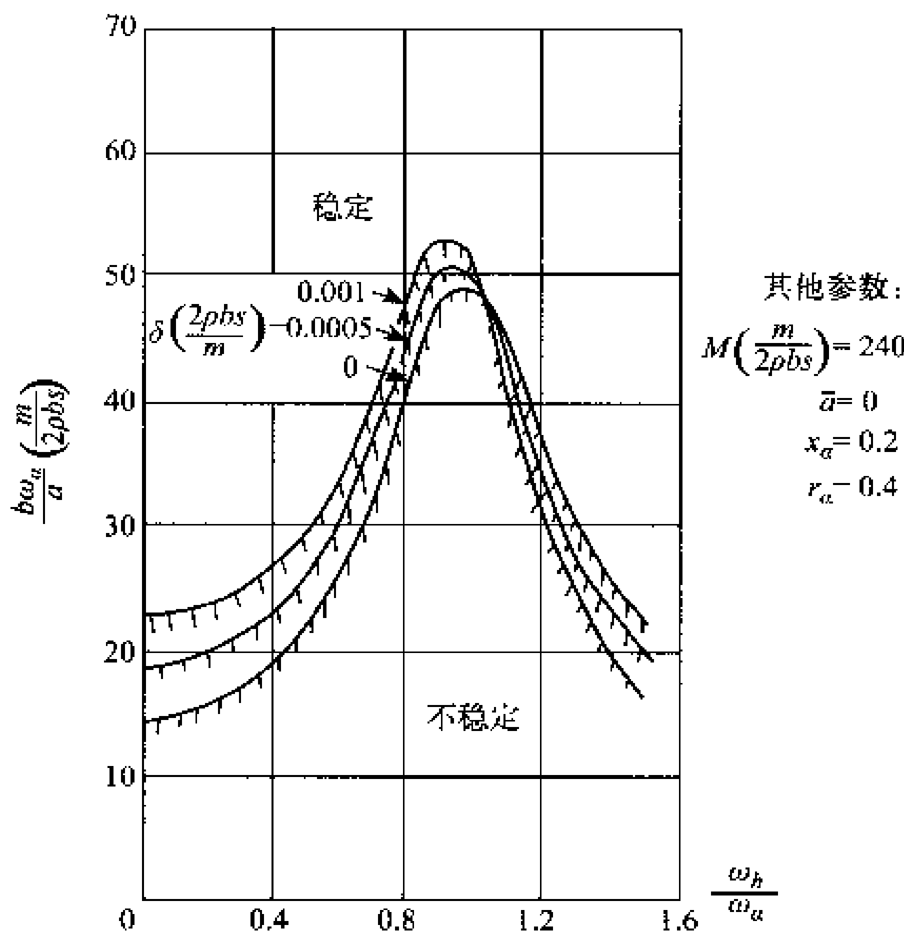


图 9-6 菱形剖面的 $\frac{b\omega_\alpha}{a}\left(\frac{m}{2\rho bs}\right)\sim\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}$ 曲线

为稳定的趋势。这使设计人员对全动式操纵面感兴趣，因为它的 ω_α 较低。

图 9-7 表示菱形剖面在 $\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}=0$ 时，改变厚度比和弹性轴(E. A)位置的$\frac{b\omega_\alpha}{a}\left(\frac{m}{2\rho bs}\right)\sim\left[\bar{a}+\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)M\delta+x_\alpha\right]$(即气动力中心 A. C 到翼剖面重心 C. G 的弦向无因次距离）曲线。其中 $M\delta$ 包含了厚度的变化。当增加机翼的厚度比时，$\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}$ 较低，C. G 在中弦点附近，这是导致极不稳定的主要原因。此外，A. C 到 C. G 的距离，从近于零到高超音速的所有马赫数，一般以相同的方式影响着颤振。

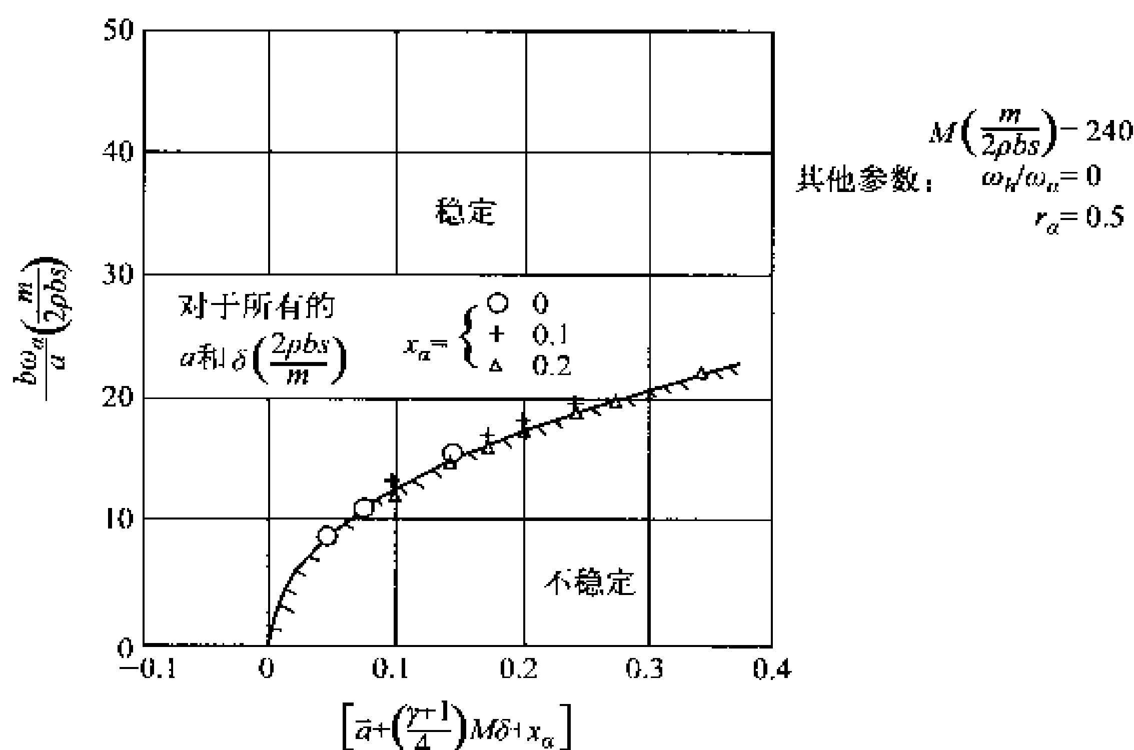


图 9-7 菱形剖面的 $\frac{b\omega_\alpha}{a}\left(\frac{m}{2\rho bs}\right)\sim\left[\bar{a}+\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)M\delta+x_\alpha\right]$ 曲线

图 9-8 表示在较高的 ω_h/ω_α 时，以静不平衡度 x_α 作为控制因素，改变厚度比和弹性轴(E. A)位置而引起$\frac{b\omega_\alpha}{a}\left(\frac{m}{2\rho bs}\right)$的变化。

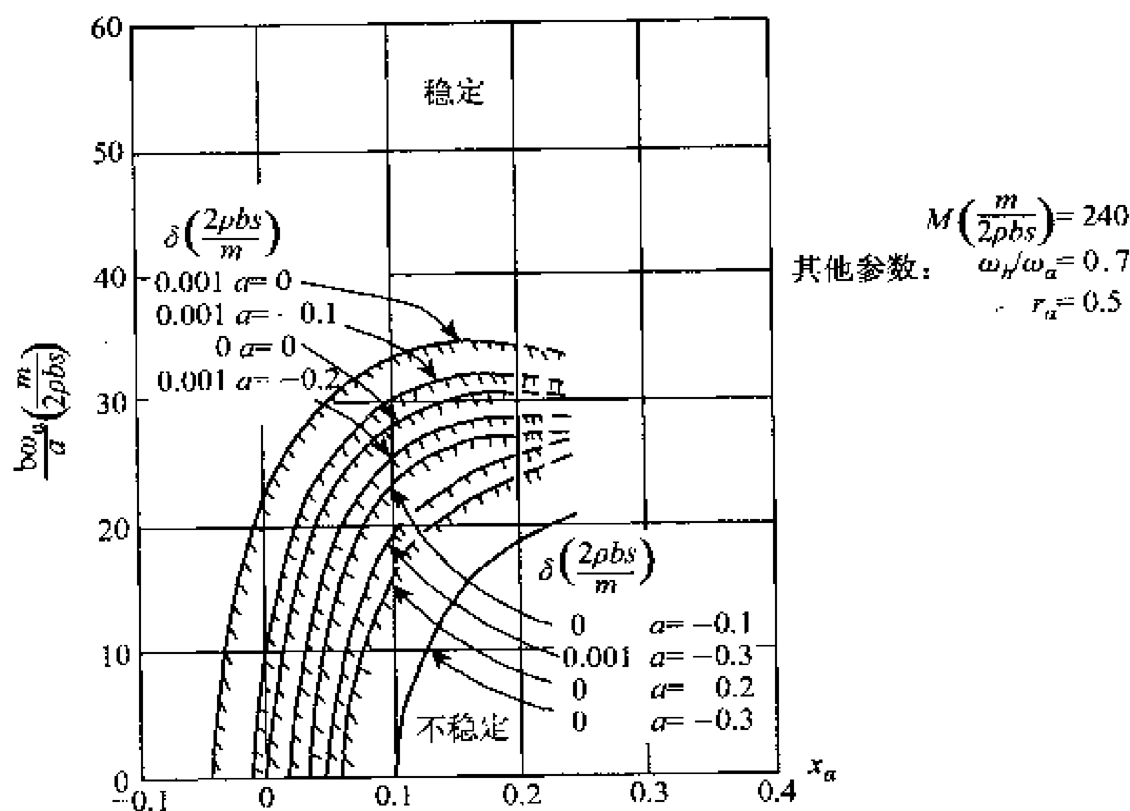


图 9-8 菱形剖面的 $\frac{b\omega_\alpha}{a}\left(\frac{m}{2\rho bs}\right)\sim x_\alpha$ 的曲线

2. 俄罗斯的方法

(1) $M<1$

当飞行速度 U 等于颤振临界速度时，气动激振力 $P_{激}$ 应等于机翼上的惯性力 $P_{惯}$(见图 9-9)。作用在机翼单位长度上的气动激振力为

$$P_{激}=C_y^\alpha\cdot\Delta\alpha_{弹}(2b)q\cos X \tag{9-19}$$

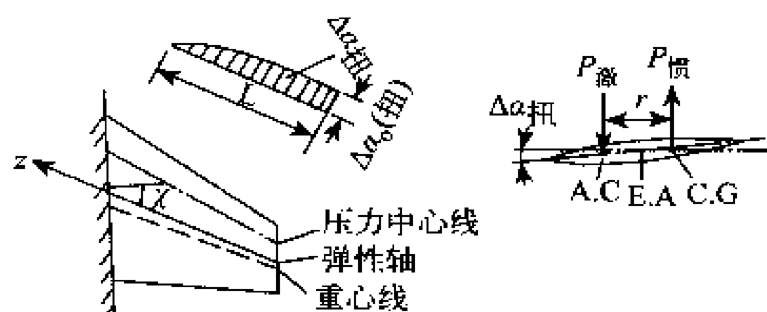


图 9-9　机翼几何及作用力

式中，C_y^α 为升力曲线的斜率，$2b$ 为沿气流方向的翼剖面弦长，q 为动压，X 为机翼弹性轴的后掠角。且

$$\Delta\alpha_{弹} = \Delta\alpha_{扭}\cos X = \Delta\alpha_{0扭}\cdot\cos\frac{\pi\bar{z}}{2}\cos X \tag{9-20}$$

其中，$\Delta\alpha_{0扭}$ 为机翼的最大扭转角。$\bar{z}=\dfrac{z}{L}$。

由扭矩

$$M_k = L\int_0^{\bar{z}} rP_{激}\cdot\mathrm{d}\bar{z} \tag{9-21}$$

（r 为翼剖面气动力中心到重心的距离）产生的最大扭角应与 $\Delta\alpha_{0扭}$ 相等，即

$$L\int_0^1\frac{M_k}{GJ} = \Delta\alpha_{0扭} \tag{9-22}$$

将 $P_{激}$ 代入 M_k，得到颤振临界速度：

$$U_f = \sqrt{\frac{2}{k\rho\cos X\cdot C_y^\alpha}} \tag{9-23}$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
k &= (L\cos X)^2 \int_0^1 \frac{\int_0^{\bar{z}} C_y^\alpha (2b)^2 \bar{r} \cos \frac{\pi \bar{z}}{2} \mathrm{d}\bar{z}}{GJ} \mathrm{d}\bar{z} \\
\bar{r} &= \frac{r}{(2b)\cos X}
\end{aligned}\right\} \tag{9-24}
$$

GJ 为机翼的扭转刚度，ρ 为空气密度。

当机翼的 $2b, r, C_y^\alpha$ 以及 GJ 等于常值时，则(9-23)式改写为

$$
U_f = \frac{\pi}{S}\sqrt{\frac{2GJ}{\bar{r} C_y^\alpha \rho \cos X}} \tag{9-25}
$$

式中，S 为机翼两悬臂部分的面积。

由上式可知，颤振临界速度与机翼的面积成反比，与机翼扭转刚度的平方根成正比，而与弯曲刚度无关。此外，高度增加时，颤振临界速度提高。机翼后掠角增大时，U_f 也提高。

(2) $M>2$(文献[64])

作超音速飞行时，当 $M>2, c_y^\alpha \approx \frac{4}{M}$：

$$
U_f = \frac{1}{2ka\rho\cos X} \tag{9-26}
$$

式中，a 为音速。

对于翼展方向为常值特性的机翼，(9-26)式改写为：

$$
U_f = \frac{\pi^2}{2S} \frac{GJ}{\bar{r} a \rho \cos X} \tag{9-27}
$$

超音速飞行时，U_f 将随着马赫数的增大而提高。因为颤振临界速度与 $\bar{r}$ 成反比，力图缩小气动力中心到重心的距离。为了提高 U_f，往往在机翼前缘加上适当的配重，使重心向气动力中心靠近。当重心与气动力中心重合时，则 U_f 变为无穷大。对于小展弦比机翼，由于 c_y^α 值较小，颤振临界速度则要提高。

现在，我们以一歼击机的机翼为例，计算它的颤振临界速度。

已知：机翼面积 $S = 23\ m^2$，　　$\bar{r} = 0.18$，

$GJ = 2.7 \times 10^5\ kg \cdot cm^2$　　$\rho = 0.125\ kg \cdot s^2/m^4$，

$c_y^a = 3.5, X = 45°$。

将数据代入(9-25)式，则

$$U_f = \frac{3.1416}{23}\sqrt{\frac{2 \times 2.7 \times 10^5}{0.18 \times 3.5 \times 0.707 \times \frac{1}{8}}} = 426\ m/s$$

3. 英国的方法

英国皇家航空研究院提出了作为升力面颤振设计规范用的公式。该规范包括下列诸参数：(1) 升力面的结构扭转刚度；(2) 空气密度；(3) 惯性轴位置；(4) 升力面后掠角；(5) 马赫数；(6) 展弦比；(7) 尖削比；(8) 刚度比；(9) 升力面密度比。这些参数大致是按其重要性而依次排列的。

这种估算公式，最初是根据理论研究得出的，后来经过试验又逐渐地作了修正。

对于后掠翼，可按下列公式估算颤振临界速度[69]：

$$U_1 = \left(\frac{K_\theta}{\rho_0 l c_m^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(0.9 - 0.33\eta)(1 - 0.1\bar{K})(0.95 + 1.3/\bar{\rho}_w)}{0.78(\bar{g} - 0.1)} \cdot \sec^{\frac{3}{2}}\left(\Lambda - \frac{\pi}{16}\right) \tag{9-28}$$

$$U_2 = \begin{cases} U_1(1 - 0.166 M_1 \cos\Lambda); & M_1 \cos\Lambda \leqslant 1.265 \\ 0.79 U_1; & M_1 \cos\Lambda > 1.265 \end{cases} \tag{9-29}$$

式中，U_2 为颤振临界速度。$M_1 = U_1/$ 当地音速。Λ 为升力面的后掠角(指前缘后掠角)。K_θ 为 70% 半翼展处的升力面扭转刚度，K_h 为 70% 半翼展处的升力面弯曲刚度(单位均是 kg · m/rad)。K 为刚度比，即 $K = \dfrac{K_h c_m^2}{0.81 K_\theta l^2}$，$(0.5 \leqslant K)$。$l$ 为根部到梢部的升力面长度。c_m 为升力面的平均弦长。η 为升力面尖削比，即 $\eta =$ 梢弦 / 根弦，

$0 \leqslant \eta \leqslant 1$。$\bar{g}$ 为升力面惯性轴到前缘的距离÷升力面弦长，$0.35 \leqslant \bar{g} \leqslant 0.6$。$\rho_0$ 为海平面高度的空气密度；ρ_w 为升力面密度，即 $\rho_w = \dfrac{\text{升力面质量}}{lc_m^2}$；$\bar{\rho}_w$ 为升力面的密度比，即 $\bar{\rho}_w = \dfrac{\rho_w}{\rho_0}$。

(9-29) 式中的 U_2 考虑了马赫数的影响。

高速飞行器广泛采用三角翼，它具有刚度比 $\bar{K}$ 大的特点。若仍采用上述公式估算刚度比大的升力面，求得的颤振临界速度往往过低。于是，在估算公式中引进一个修正的刚度比因子。修正公式如下[70]。

$$U_1 = \left(\frac{K_\theta}{\rho_0 lc_{0.7}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(0.77 + 0.1/\bar{K})(0.95 + 1.3/\bar{\rho}_w)}{\bar{g}} \sec^{\frac{3}{2}}\left(\Lambda - \frac{\pi}{16}\right) \tag{9-30}$$

$$\begin{aligned} U_2 &= U_1(1 - 0.166 M_1 \cos\Lambda); \quad & M_1 \cos\Lambda \leqslant 1.265 \\ &= 0.79 U_1; \quad & M_1 \cos\Lambda > 1.265 \end{aligned}$$

其中，U 为所求的颤振临界速度，M_1 为对应于速度 U_1 的马赫数，Λ 为升力面前缘后掠角。

现在，我们以两个模型机翼(编号分别为 1195 和 1198)为例[70]，就估算公式和修正公式得到的结果同地面发射火箭的颤振试验数据进行了比较。模型机翼的平面形状如图 9-10 所示，图上还列出了振动频率的大小和节线位置(根部为固支)。原始数据如表 9-2 所示。这两个模型机翼的估算颤振临界速度与火箭颤振试验的测量速度如表 9-3 所示，其中包括用修正公式求得的结果。火箭颤振试验的测量结果包括颤振临界速度 U，与临界速度对应的马赫数 M、颤振频率 ω_f、火箭的轴向过载 n_x(即火箭加速度÷重力加速度)、模型机翼破坏时的速度 U_F 等。

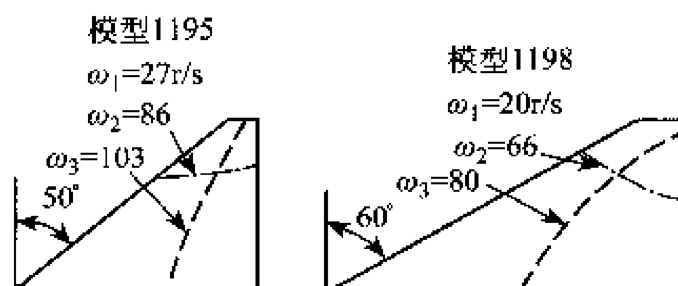


图 9-10 火箭颤振试验用的模型机翼

表 9-2 模型机翼的原始数据

模型编号	Λ (°)	l (m)	c_m (m)	η	K_h (kg·m/rad)	K_θ (kg·m/rad)	$\overline{K}$	$\overline{g}$	ρ_w (kg/m³)
1195	50	0.6	0.482	0.143	355	103.5	2.65	0.43	15
1198	60	0.6	0.702	0.143	355	312	1.86	0.43	12

表 9-3 估算速度与火箭颤振试验测量结果的比较

模型编号	估算速度			火箭颤振试验测量结果					比值	修正公式的结果			
	U_1 (m/s)	$\frac{M_1}{\sec\Lambda}$	U_2 (m/s)	U (m/s)	M	ω_f (r/s)	n_r	U_F (m/s)	$\frac{U}{U_2}$	U_1 (m/s)	$\frac{M_1}{\sec\Lambda}$	U_2 (m/s)	U/U_2
1195	288	0.54	262	277	0.81	60	49	299	1.06	318	0.60	285	0.97
1198	497	0.73	437	387	1.14	45	39	561	0.89	504	0.74	442	0.88

由表 9-3 的结果知，估算速度在测量速度的±15％以内。

除了上面介绍的估算公式之外，在英国还广泛地应用 A.P.970（第五部分）作为正式的设计规范。在使用该规范中所推荐的公式时，应弄清它的应用范围。

各国的估算方法虽不相同，公式的形式也不一样，但只要我们了解公式的来龙去脉及其应用条件，合理地选取原始参数，不同的方法和公式也能得出一致的结果。例如，我们以一截尖三角翼为例，按上

面推荐的俄罗斯方法和英国方法分别作了计算，二者的颤振临界速度是极其吻合的(见表 9-4)。

表 9-4　一截尖三角翼的颤振临界速度

估算方法	俄罗斯方法	英国方法
U_f(m/s)	2 150	2 110

此外，文献[71]在二自由度的基础上，推导出考虑俯仰自由度影响的颤振临界速度和颤振频率的估算公式，并就具有垂直升力面的一个导弹模型，在马赫数 M 为 0.95，1.92，4 时分别作了计算，由于篇幅所限，此处不予详述。

§3. 结构设计的刚度问题及其他

以上，我们推荐了若干估算公式供设计人员在初步设计阶段使用。当总体方案和结构布局确定之后，还应提出各部件的结构刚度要求供结构设计人员设计各部件的结构细节。

过去，人们习惯于以强度要求作为结构设计的主要准则。而对于超音速飞机和导弹，结构刚度要求却成为矛盾的主要方面。有时候会出现这样的情况：一个部件按强度考虑是符合要求的，但从刚度的观点来考察，还达不到预定的要求。似乎强度要求和刚度要求是矛盾的，实际上却又是统一的。

为预防颤振和操纵面的反逆、满足稳定飞行等要求，力求达到最小重量的最佳化设计。因此，需对飞行器的各部件提出结构刚度的控制指标和若干规定。以下，我们将以不长的篇幅概括一下结构刚度要求的一些内容。

1. 机身(或弹身)

它作为整个飞行器的主体，把各个部件连结构成一个整体，是很

重要的一环。

机身不应与全动舵面(或全动式尾翼)、机翼(或者机翼－发动机组合)、尾翼等部件发生耦合振动。一般应给出机体的振动频率要求,例如油箱不加注燃料时的机体一、二阶弯曲振动频率大小,油箱加注燃料时机体的头一、二阶弯曲振动频率以及扭转振动频率的大小。对于导弹而言,还要提出带助推器的弹体弯曲振动频率的大小。

若机身在结构上不对称,需同时提出垂直平面和侧向平面内的弯曲刚度沿机身纵轴的分布。对于具有圆形剖面且结构对称的导弹弹身,可以认为垂直平面内的弯曲刚度沿弹身纵轴的分布等于侧向平面内的弯曲刚度分布。如果弹身的弯曲刚度足够了,可不必提出弹身的扭转刚度沿弹身纵轴的分布。而对于一般的飞机,还需提出机身的扭转刚度分布。此外,机身的蒙皮应具有足够的连接刚度。在使用载荷的作用下,蒙皮不应有局部的翘曲和残余变形。前面已提到过,德国的 V-2 导弹和美国的土星Ⅴ-阿波罗飞行器曾发生过蒙皮颤振。

2. 机翼(或弹翼)

对于大展弦比机翼和后掠机翼,可按惯用的弯曲刚度和扭转刚度沿翼展的分布作为刚度要求。对于小展弦比机翼,一般以机翼上的结构控制点的刚度影响系数作为刚度要求为宜。

翼尖携带发动机、副油箱的矩形(或者梯形)机翼的刚度要求以弯曲刚度和扭转刚度沿翼展的分布来表征。对机翼梢部的弹性变形引起发动机轴线相对于机身轴线的(俯仰)偏转角,要加以严格限制。

机翼与机身的连接处必须具有足够的连接刚度。机翼在任何一种设计情况的使用载荷作用下,翼尖的扭转角要控制在一定的范围内。

机翼的刚度要足以避免在其飞行速度范围内发生颤振,即满足下列条件:

$$U_f > c \cdot U_{max \cdot max}$$

其中,U_f 为机翼的颤振临界速度。$U_{max,max}$,对于飞机为俯冲时的最大允许速度;对于导弹,为下滑时的最大允许速度。c 为一常数,它取决于飞行的安全余量,例如,有的国家的飞机取 $c=1.15$ 或者1.25。

除了机翼本身不发生颤振之外,还应保证副翼具有足够的效率。

3. 尾翼

对于尾翼,提出刚度要求的出发点与机翼相似。

小展弦比尾翼安定面的刚度要求,以尾翼上的结构控制点的刚度影响系数表示为妥。对于(非小展弦比)后掠式尾翼,也可用弯曲刚度和扭转刚度沿翼展的分布表示。尾翼安定面在任何一种设计情况的使用载荷作用下,翼尖的扭转角与机翼一样,要控制在一定的范围内。

尾翼与后机身的连接处应具有足够的连接刚度。考虑后机身的弹性变形,尾翼不应发生颤振等不稳定现象。

若机身(或弹身)或机翼携带外挂式冲压发动机,尾翼在结构上需采取相应的措施(如采用三层板蒙皮或加填料的方法),减小冲压发动机工作时的噪声所引起的声振。

4. 副翼

副翼的刚度要求包括副翼本身和副翼操纵系统两部分组成。副翼本身应具有足够的扭转刚度,通常用扭转刚度沿翼展方向的分布来表示。副翼的操纵系统刚度可用下列形式给出:

$$C \geqslant (2\pi \times \omega)^2 \times J$$

其中,C 为操纵系统刚度(kg·m/rad);

ω 为副翼对转轴的偏转振动频率(r/s);

J 为副翼对转轴的质量惯性矩(kg·m·s^2)。

副翼操纵系统的活动间隙,应给以严格的限制(或折合成副翼的

偏转角）。副翼舵机支座的刚度应远大于操纵系统的刚度（例如，取前者为后者的 10 倍）。在各种使用载荷作用下，操纵系统都不应发生紧涩现象。

副翼的质量平衡，是预防颤振发生的重要因素。现在，我们对它作一简单的说明。通常，副翼的重心位于转轴的后面，为消除副翼的铰链力矩（它等于副翼的惯性力乘以副翼重心到转轴的距离），应在副翼前缘加上保证副翼动平衡的配重，即满足条件：

$$P_{配重} \cdot e = P_{副翼} \cdot a$$

其中，$P_{配重}$ 和 $P_{副翼}$ 分别为配重和副翼产生的惯性力。e 为配重重心到副翼转轴的距离，a 为副翼重心到转轴的距离（图 9-11）。

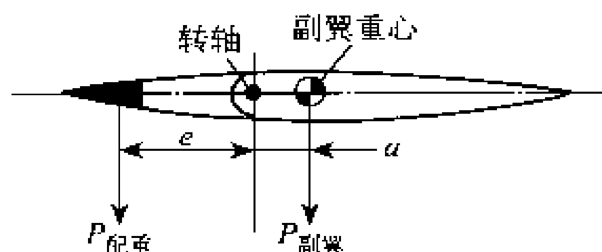


图 9-11　副翼的质量平衡

因法向加速度沿副翼长度是变化的，希望把配重安放在加速度最大处，即在副翼的外侧。但考虑到可能引起副翼的扭转，于是把配重分布在整个副翼的前缘。此时，动平衡条件与静平衡条件相同，副翼和配重的重心位于转轴上，即

$$G_{配重} \cdot e = G_{副翼} \cdot a$$

其中，$G_{配重}$ 和 $G_{副翼}$ 分别为配重重量和副翼重量。这种平衡有时称为百分之百。为了消除实际飞行速度范围内的颤振，要求副翼过平衡。副翼加上配重之后，副翼的重心在转轴前面。例如，过平衡度为 1% 左右，即副翼加配重后的重心在转轴前面的百分之一左右的副翼平均弦长。具体说来，取多大的过平衡度应进行分析计算。

5. 舵面

同样地，舵面的刚度要求包括舵面本身和操纵系统两部分组成。舵面本身应具有足够的扭转刚度，可按沿展向的分布曲线给定。舵面的操纵系统刚度，与副翼相同，可表示为

$$C \geqslant (2\pi \times \omega)^2 \times J$$

其中，C、ω 以及 J 的定义与副翼相同。

全动式舵面对于导弹而言，通常是整体钣结构，舵面本身的刚度是足够的；对于飞机，多数采用铆接结构，应认真分析它的刚度分布。此外，操纵系统的刚度可表示为如下两种形式：

(1) 操纵系统的刚度应满足

$$C \geqslant (2\pi \times \omega)^2 \times J$$

(2) 当舵面处于最大偏转角时，由于操纵系统的弹性变形，引起舵面的附加偏转角应予以严格限制。

舵面操纵系统的活动间隙和舵机支座的刚度与副翼的要求相同(其中对全动式舵面的操纵系统活动间隙更要严加限制)。

舵面应尽可能地保持质量平衡。舵面加上配重之后，舵面的重心应在转轴前面。例如，约为 1%～2%舵面的平均弦长。

以上对各主要部件的刚度要求作了一个概括的说明。

严格说来，飞机和导弹的结构刚度要求是在一定的条件下才能成立的。总体方案、结构形式不同，刚度要求也有所不同。一般，通过理论计算方法来判断结构刚度是否满足要求是很困难的，需要进行大量的试验(包括飞行试验和地面试验)，再加上工程实践中的经验积累。要制订出指导设计的刚度规范，必须经历较长时间的反复认识、反复实践，不断地积累资料，把感性认识上升到理性认识，来一个去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的过程，才能达到掌握事物的规律性，反映客观世界的真实性。

此外，我们还要对操纵面的跨音速嗡鸣(buzz)现象引起注意。

它是一种单自由度的颤振，副翼和舵面都会产生这种现象。其原因有二：

(1) 当机翼上出现激波时，激波后面的气流产生分离现象。它后面的涡流给副翼的冲击对副翼转轴形成一个起激振作用的气动力矩，致使副翼振动。

(2) 由于上、下翼面的激波强度不同，构成了上、下翼面的压力差，致使副翼偏转。

因激振的气动力矩与副翼偏转之间存在着相位差，可能引起运动的不稳定。

一般在 $0.9<M<1.5$ 范围内，可能产生嗡鸣现象。为了预防它的发生，需保证操纵面的扭转刚度和操纵系统刚度符合要求，也可采用阻尼器，或选择合理的气动外形。

按照各部件的结构刚度要求确定结构的细节之后，就必须着手颤振模型的试验工作和详细的颤振分析计算工作，以验证设计方案的合理性，抓住某些薄弱环节，加以改进和弥补。

为了保证颤振分析工作的完整性，应尽快制订出颤振分析大纲，包括各项工作内容。例如，用有限元方法对结构进行刚度分析，计算各部件的振动形态及其频率，计算各部件的惯性参数，作为颤振分析计算的原始数据；对不同的速度范围，选取非定常气动力理论计算方法，以建立从亚音速到跨音速、超音速以至高超音速的颤振边界。此外，应包括颤振模型的试验项目和工作程序。除了作部件的颤振模型试验之外，还要作组合体的颤振模型试验，甚至于全机模型的颤振试验。对于有些类型的飞机，需作全尺寸飞机的飞行颤振试验。根据国内的设备状况和技术条件，是用风洞(是高速风洞或是低速风洞)，还是用地面发射火箭、自由下滑模型来完成颤振试验项目，应在颤振分析大纲中予以考虑。当样机试制出来之后，需进行部件的和全机的地面共振试验，测定各部件和全机的振动特性(包括各阶振动频率和振型)；进行部件和全机的刚度试验，测定各部件的刚度数据

（或变形特性）。通过上述一系列的地面试验，取得最后的颤振计算的原始数据，借助于高速电子计算机，完成一系列的最后的颤振计算工作。将颤振模型的试验结果与分析计算结果进行比较，确定飞行的安全余量，为飞行器的试飞和最后的产品定型提供分析报告。

§4. 颤振主动控制和最佳化

以前在预防颤振方面，往往采取一些比较被动的方法，诸如增加部件的结构刚度，保持操纵面的质量平衡，以及限制飞行速度等。这些方法对飞行器的性能产生着极其不良的影响。国外研究过利用飞行控制系统，控制或改变飞机结构和气动特性的主动方法。例如，美国 NASA 和波音飞机公司曾制订了 B-52 型飞机的 CCV（随控布局飞行器）研究计划。整个 B-52 型飞机的 CCV 计划包括了减轻载荷和形态稳定（LAMS）系统、颠簸控制（RC）系统、机动载荷控制（MLC）系统以及增加稳定性（AS）系统和减小疲劳（FR）系统等[72][73]，此外，颤振形态控制（FMC）也属于其中的一个项目。颤振主动控制技术已成功地用于超音速运输机、C-5A、波音-747、B-1、F-4以及 YF-16 等飞机上，并取得了很大的成效。

颤振主动控制是以气动能量概念为基础的。即在发生颤振时，飞机结构从气流中吸取能量。换言之，要抑制颤振的产生，结构在振动过程中，需对气流作正功。由理论分析知，只要保持气动力和结构振动之间的适当相位关系，是可以达到抑制的目的。

颤振形态控制（FMC）系统是由两个独立回路组成的。安装在适当结构位置上的加速度传感器，感受结构振动的垂直加速度，经成形滤波器保持适当的相位关系，去带动副翼和襟翼等主动控制面，产生附加的气动力，对结构弹性振动进行稳定，从而达到抑制颤振的目的。图 9-12 给出了 B-52 型飞机颤振形态控制（FMC）系统的传感器和操纵面位置；图 9-13 表示 B-52 型飞机颤振形态控制（FMC）系统

的作用原理方框图。

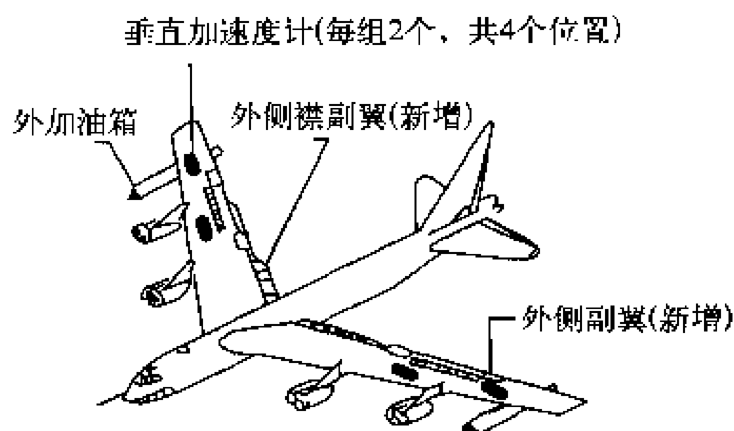


图 9-12　B-52 型飞机颤振形态控制的操纵面和传感器位置

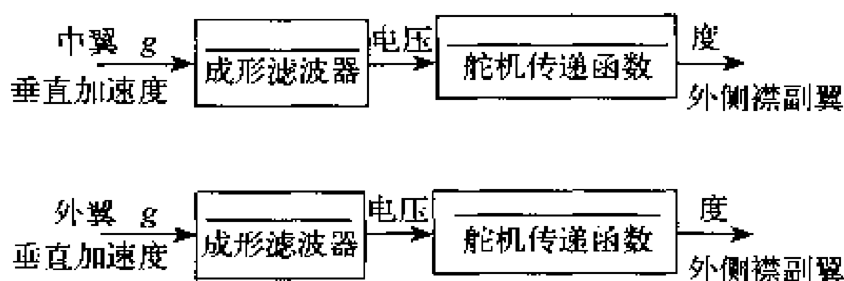


图 9-13　B-52 型飞机 FMC 系统的作用原理方框图

应用颤振主动控制方法，在结构重量增加不大的情况下，可使颤振速度提高 30%以上。

现代飞行器结构设计的最佳化问题，必须同时考虑强度和刚度的要求。例如，满足强度和颤振速度要求的最小重量设计，最初大多数采用试凑法，对单纯考虑强度要求的设计，进行反复的修改，以满足临界飞行条件下的颤振速度要求。后来发展了能够同时考虑强度和刚度要求的最佳化方法，基本上可分成两类。一类是应用能量原理和最优判据，另一类是利用数值寻求技术。发展计算机自动化设计程序，使设计自动化，对加速设计过程、缩短研制周期，对于满足强

度和刚度条件下的最小重量的结构设计，有着极为重大的意义。图9-14表示了双弧形剖面的机翼例子。在下列条件：

翼载　　6.89千N/m^2

颤振动压　160千N/m^2

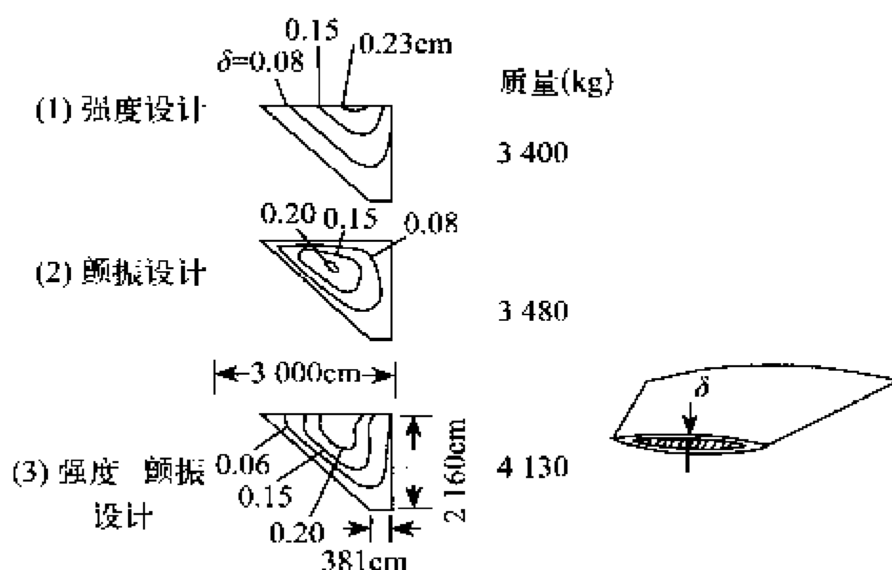


图9-14　同时考虑强度和颤振要求的最佳化设计

下，设计时考虑了强度和颤振两方面的要求。结构应力分析采用夹层钣理论，颤振分析采用活塞气动力理论。图上分别给出了单独考虑强度、颤振要求以及综合考虑这两种要求的最小重量设计结果，由此可见三者的厚度分布是很大不同的。

应用颤振最佳化方法，对某些机翼、直升机旋翼、机身蒙皮等部件的设计结果表明，在相同的气动弹性要求条件下，可使部件的结构重量减轻5%～15%。若保持结构重量大致相等的条件下，则颤振速度可提高20%～30%。显然，这对飞行器的设计是多么重要。

第十章　颤振试验

在这一章里，我们来讨论颤振试验。颤振的理论分析和试验研究工作是不可分割的两个环节。在飞行器的研制过程中，二者是交替进行的，又是互为验证的。

颤振试验主要用来测定颤振发生时的气动力条件、颤振频率以及颤振时结构的变形形态。作为颤振试验应该解决如下三个问题：

(1) 颤振模型的结构形式和设计；

(2) 采用什么试验方法和设备；

(3) 试验结果与全尺寸的飞机或导弹的关系，并同理论分析计算结果的比较。

对于低速颤振试验，大多数都是在风洞中完成。对于高速颤振试验，可采用风洞，也可采用其他的方法：例如地面发射火箭、自由下滑模型以及火箭车等。对于跨音速颤振试验，很少有合适的风洞，即使有合适的风洞，人们耽心模型在产生颤振时可能损坏风洞。从颤振的观点来考察，跨音速区是最为重要的。在亚音速和超音速区不会产生的颤振现象，而可能在跨音速区发生。除了风洞试验之外，地面发射火箭和自由下滑模型也是值得重视的颤振试验途径。

对于颤振的主动控制，需借助于飞行试验。

以下，我们将分别介绍这些试验方法，并列举一些试验结果。

§1. 风洞颤振试验

过去若干年来，风洞模型颤振试验已大量地用于飞行器的设计工作，成为取得颤振结果的一种重要途径。尤其是对于理论分析计

算尚不能获得满意结果的跨音速区更为如此。可以说颤振模型试验已经成为高速飞行器设计工作不可分割的一部分。例如,一架飞机的研制过程,风洞模型试验时间为数千至一、二万小时,而结构振动和颤振试验约占其中的20%左右(表10-1)。

表10-1 风洞试验与颤振试验时间的比较

飞机型号	风洞试验总时数(h)	结构振动和颤振试验(h)	百分比(%)
F-15战斗机	12 945	2 792	21.5%
B-70轰炸机	约14 000	约2 800	20%
波音-727旅客机	约5 400	约1 000	18.5%

由于篇幅的限制,我们不打算对试验的细节作详细的介绍,而只作简略的说明。为使模型颤振试验结果能用以检验或校核理论计算结果,模型应按一定的相似参数来模拟飞行器的部件,即满足下列相似条件:

(1) 几何相似;

(2) 质量分布和集中质量相似;

(3) 刚度分布和集中刚度相似;

(4) 材料-空气密度比相似;

(5) 简化速度 $V/b\omega$ 相似。

就低速风洞颤振模型而言,根据风洞试验段尺寸和风洞的最大风速,应选取下列比例尺:

(1) 长度比 $k_L=\frac{L_{模型}}{L_{实物}}$;

(2) 速度比 $k_V=\frac{V_{kp}}{V_{风}}$,即模型的估算临界速度与风洞风速之比;

(3) 空气密度比　$k_\rho = \frac{\rho_{模型}}{\rho_{实物}}$,通常取 $k_\rho = 1$。

对于高速风洞颤振模型,有下列比例尺:

(1) 长度比 k_L;

(2) 动压比 k_q;

(3) 马赫数比 k_M　它是高速风洞试验中出现的一个新参数,为了正确地反映马赫数的影响,通常取 $k_M = 1$;

(4) 气流密度比 k_ρ。

按照上述的相似参数设计的颤振模型,制作成以后,还须进行刚度试验和地面共振试验,测量模型的刚度数据和振动参数是否与实物保持一定的比例关系。

关于模型的相似律、模型理论、模型的结构及其设计、模型的制作与校核、模型的试验技术等一系列问题,在文献[66]中,毕斯普里霍夫等人用三章的篇幅作了系统的阐述。文献[74][75]也作了精辟的概括。

风洞颤振试验的优点在于:工作人员可以直接观察模型在风洞中的情况,通过一套操纵系统控制模型的运动。当模型发生颤振时,利用安全装置将模型固定住,使之不产生大幅度的振动、甚至造成模型的破坏。这样,既保护了风洞免遭损坏,又保存了模型可以多次使用。因此,风洞颤振试验已发展成为专门的试验技术。它既可作部件模型的试验,又可作全机模型的试验。有的国家为了满足颤振试验的需要,建立了专门的气动弹性风洞,例如美国兰利的 610 mm 跨音速气动弹性风洞、兰利 230×460 mm 超音速气动弹性风洞以及兰利 280 毫米高超音速气动弹性风洞等。

1. 低速风洞试验

对于大展弦比、中等展弦比的机翼和尾翼,往往利用低速风洞作颤振试验。有时为了研究翼面刚度、弹性轴位置、机翼(尾翼)平面形状(如后掠角、尖削比、展弦比)以及集中质量的影响,也广泛

采用低速风洞试验。试验时除了用仪器记录颤振模型的振动过程之外，还可用眼睛直接观察模型的情况，判断颤振的发生，从中增加感性认识，有利于加深对试验过程的理解，这对培养专业技术人员颇有好处。

低速颤振模型有软蒙皮模型、分段翼型模型、受力蒙皮模型、梁架分块模型等形式。其中分段翼型模型多用来模拟非小展弦比翼面的部件，翼面的刚度用一根（或两根）金属梁来模拟，翼面外形用木质翼肋、分段的展向木质桁条以及糊上纸质表皮来维持，沿展向分成数个翼段，翼段之间留有一定的缝隙，以免模型在吹风时翼段间发生碰撞，但缝隙也不宜大，以免破坏模型的流动图形。对于小展弦比翼面，采用分段翼型模型就不合适了。因为展弦比较大的机翼（或尾翼），可将结构简化为一根梁的形式。大量试验证明，这种简化是足够准确的，是由于弦向尺寸小于展向尺寸，因此弦向变形相对于展向变形是可忽略的。但是，小展弦比机翼（或尾翼）的弦向尺寸与展向尺寸为同等量级，弦向变形与展向变形同等重要。这样，对于小展弦比机翼，再也找不到一根弹性轴，它既能反映弦向的变形特性，又能表征展向的变形特性。这就是小展弦比机翼不能采用单梁模型的根由。由于弹性轴的概念不适用于小展弦比机翼，它的变形特性类似于板。每一结构元件，弯扭变形同时存在，扭转时将使翼剖面发生翘曲，于是初等梁理论的平剖面假设就失效了。此外，弦向剖面内的不同翼梁在受扭时产生差动弯曲。

那么，小展弦比翼面的低速颤振模型的结构到底采用何种形式好呢？

这里，我们介绍梁架—轻木分块结构。这种形式已得到了应用。在文献[66]中，三角形机翼的低速颤振试验就选取了这种模型形式（见图 10-1）。

现在，我们用五根正交梁架结构来模拟翼面的刚度。在这种结构中，展向翼梁受弯时，弦向翼肋不参与；同样地，弦向翼肋受弯时，

展向翼梁也不参与。如图 10-2 所示的梁架系统，它是由三根展向翼梁和两个弦向翼肋组成的。力的平衡方程式为：

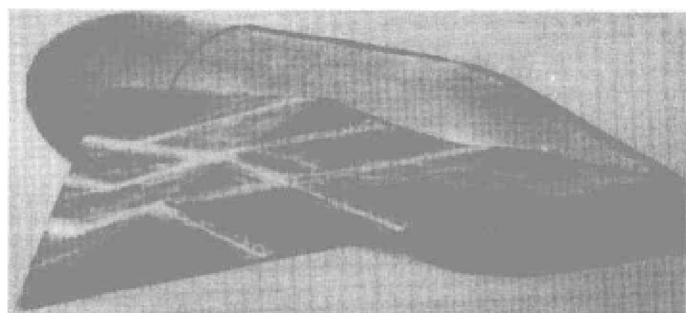


图 10-1 梁架—轻木分块结构的低速颤振试验的三角形机翼模型

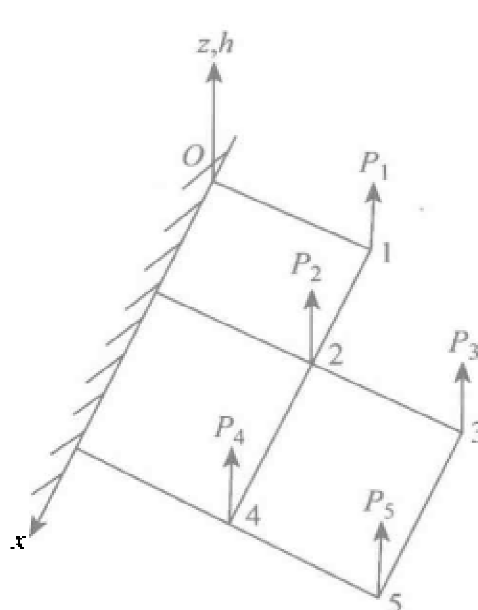


图 10-2 梁架系统的坐标和示力图

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= L_1 + R_1 \\ P_2 &= L_2 + R_2 \\ &\cdots\cdots \\ P_i &= L_i + R_i \quad (i = 1,2,\cdots,5) \end{aligned}\right\} \tag{10-1}$$

式中，P 为外力，L 为作用在翼梁上的反力，R 为作用在翼肋上的反力。

按照位移法，以节点位移 $h_1, h_2, \cdots, h_5$ 作为未知数，(10-1)式写成矩阵形式，即

$$\{P\} = [K]\{h\} \tag{10-2}$$

式中 $[K]$就是我们待求的刚度影响系数矩阵。

在下面的推导过程中，设梁、肋为等剖面，分别按翼梁和翼肋推导，再作迭加。

(1) 翼梁部分

0—1 梁(图 10-3)：

$$h_1 = \delta_{11}^L \cdot L_1 \tag{10-3}$$

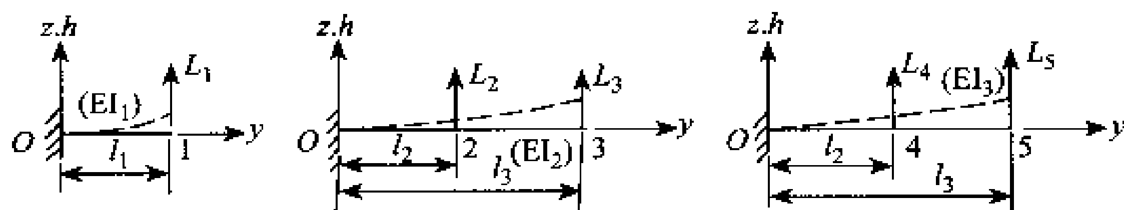


图 10-3　三根翼梁

其中　$\delta_{11}^L = \dfrac{l_1^3}{3EI_1}$，$EI_1$ 为 0—1 梁的弯曲刚度，l_1 为 0—1 梁的长度，h_1 为节点 1 处梁的挠度。

由(10-3)式，

$$L_1 = \frac{3EI_1}{l_1^3} h_1 \tag{10-4}$$

0—2—3 梁：

$$h_2 = \delta_{22}^L L_2 + \delta_{23}^L L_3 \tag{10-5}$$

$$h_3 = \delta_{32}^L L_2 + \delta_{33}^L L_3 \tag{10-6}$$

式中　$\delta_{22}^L = \dfrac{l_2^3}{3EI_2}$，$\delta_{33}^L = \dfrac{l_3^3}{3EI_2}$，$\delta_{23}^L = \delta_{32}^L = \dfrac{l_2^2}{6EI_2}(3l_3 - l_2)$。

令　$\mathscr{L} = 3l_3 - l_2$，则

$$h_2 = \frac{l_2^3}{3EI_2} L_2 + \frac{l_2^2 \mathscr{L}}{6EI_2} L_3 \tag{10-7}$$

$$h_3 = \frac{l_2^2 \mathscr{L}}{6EI_2} L_2 + \frac{l_3^3}{3EI_2} L_3 \tag{10-8}$$

由(10-7)式，

$$L_2 = \frac{3EI_2}{l_2^3}\left(h_2 - \frac{l_2^2 \mathscr{L}}{6EI_2} L_3\right) \tag{10-9}$$

由(10-8)式,

$$L_2 = \frac{6EI_2}{l_2^2 \mathscr{L}}\left(h_3 - \frac{l_3^3}{3EI_2}L_3\right) \tag{10-10}$$

让(10-9)与(10-10)式相等,则

$$\frac{3EI_2}{l_2^3}h_2 - \frac{\mathscr{L}}{2l_2}L_3 = \frac{6EI_2}{l_2^2 \mathscr{L}}h_3 - \frac{2l_3^3}{l_2^2 \mathscr{L}}L_3$$

$$L_3\left(\frac{\mathscr{L}}{2l_2} - \frac{2l_3^3}{\mathscr{L}l_2^2}\right) = \frac{3EI_2}{l_2^3}h_2 - \frac{6EI_2}{\mathscr{L}l_2^2}h_3$$

于是

$$L_3 = \frac{2l_2^2 \mathscr{L}}{l_2 \mathscr{L}^2 - 4l_3^3}\left(\frac{3EI_2}{l_2^3}h_2 - \frac{6EI_2}{l_2^2 \mathscr{L}}h_3\right) \tag{10-11}$$

将(10-11)式代入(10-9)式,

$$L_2 = \frac{3EI_2}{l_2^3}\left(1 - \frac{l_2 \mathscr{L}^2}{l_2 \mathscr{L}^2 - 4l_3^3}\right)h_2 + \frac{6EI_2 \mathscr{L}}{l_2(l_2 \mathscr{L}^2 - 4l_3^3)}h_3 \tag{10-12}$$

0—4—5 梁:

与 0—2—3 梁相似,可直接写出:

$$L_4 = \frac{3EI_3}{l_2^3}\left(1 - \frac{l_2 \mathscr{L}^2}{l_2 \mathscr{L}^2 - 4l_3^3}\right)h_4 + \frac{6EI_3 \mathscr{L}}{l_2(l_2 \mathscr{L}^2 - 4l_3^3)}h_5 \tag{10-13}$$

$$L_5 = \frac{2l_2^2 \mathscr{L}}{l_2 \mathscr{L}^2 - 4l_3^3}\left(\frac{3EI_3}{l_2^3}h_4 - \frac{6EI_3}{\mathscr{L}l_2^2}h_5\right) \tag{10-14}$$

(2) 翼肋部分(图 10-4)

1—2—4 肋:有下列四个方程式

$$h_2 = h_1 + l_4\theta + \delta_{22}^R R_2 + \delta_{24}^R R_4 \tag{10-15}$$

$$h_4 = h_1 + l_5\theta + \delta_{42}^R R_2 + \delta_{44}^R R_4 \tag{10-16}$$

$$R_1 + R_2 + R_4 = 0 \tag{10-17}$$

$$R_2 l_4 + R_4 l_5 - M_1 = 0 \tag{10-18}$$

式中,$\delta_{22}^R = \frac{l_4^3}{3EI_4}$,$\delta_{44}^R = \frac{l_5^3}{3EI_4}$,$\delta_{24}^R = \delta_{42}^R = \frac{l_4^2}{6EI_4}(3l_5 - l_4)$,$\theta$ 为翼肋的刚体转角,M_1 为外力矩。

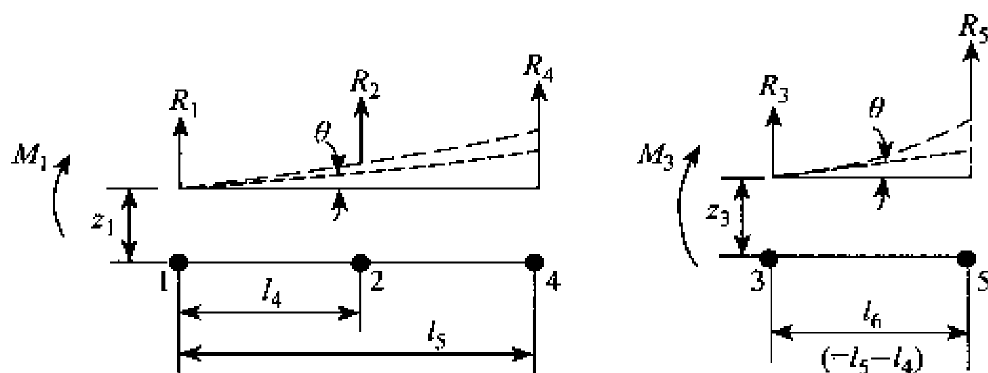


图 10-4　两个翼肋

由(10-15)式，

$$\theta = \frac{1}{l_4}(h_2 - h_1 - \delta_{22}^R R_2 - \delta_{24}^R R_4) \tag{10-19}$$

由(10-16)式，

$$\theta = \frac{1}{l_5}(h_4 - h_1 - \delta_{42}^R R_2 - \delta_{44}^R R_4) \tag{10-20}$$

让(10-19)式等于(10-20)式，则

$$(l_4\delta_{42}^R - l_5\delta_{22}^R)R_2 + (l_4\delta_{44}^R - l_5\delta_{24}^R)R_4$$
$$= (-l_5h_2 + l_4h_4) + (-l_4 + l_5)h_1$$

令 $l_4\delta_{42}^R - l_5\delta_{22}^R = A$，$l_4\delta_{44}^R - l_5\delta_{24}^R = B$，

$$(-l_5h_2 + l_4h_4) + (-l_4 + l_5)h_1 = C$$

于是

$$AR_2 + BR_4 = C \tag{10-21}$$

(10-21)式与(10-17)、(10-18)式联立

$$\left.\begin{aligned} AR_2 + BR_4 &= C \\ R_1 + R_2 + R_3 &= 0 \\ l_4R_2 + l_5R_4 &= M_1 \end{aligned}\right\} \tag{10-22}$$

它的系数行列式为

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & A & B \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & l_4 & l_5 \end{vmatrix} = Bl_4 - Al_5 \tag{10-23}$$

以及
$$\Delta_{R_1} = \begin{vmatrix} C & A & B \\ 0 & 1 & 1 \\ M_1 & l_4 & l_5 \end{vmatrix} = C(l_5 - l_4) + M_1(A - B) \quad (10\text{-}24)$$

$$\Delta_{R_2} = \begin{vmatrix} 0 & C & B \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & M_1 & l_5 \end{vmatrix} = BM_1 - Cl_5 \quad (10\text{-}25)$$

$$\Delta_{R_3} = \begin{vmatrix} 0 & A & C \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & l_4 & M_1 \end{vmatrix} = Cl_4 - AM_1 \quad (10\text{-}26)$$

由(10-23)到(10-26)式，得到

$$R_1 = \frac{\Delta_{R_1}}{\Delta} = \frac{C(l_5 - l_4) + M_1(A - B)}{Bl_4 - Al_5} \quad (10\text{-}27)$$

$$R_2 = \frac{\Delta_{R_2}}{\Delta} = \frac{BM_1 - Cl_5}{Bl_4 - Al_5} \quad (10\text{-}28)$$

$$R_3 = \frac{\Delta_{R_3}}{\Delta} = \frac{Cl_4 - AM_1}{Bl_4 - Al_5} \quad (10\text{-}29)$$

若以 $C=(l_5-l_4)h_1-l_5h_2+l_4h_3$ 代入(10-27)到(10-29)式，整理后，写成如下：

$$R_1 = D[(l_5 - l_4)h_1 - l_5h_2 + l_4h_4] + b_1 \quad (10\text{-}30)$$

式中，$D = \dfrac{l_5 - l_4}{Bl_4 - Al_5}$，$b_1 = \dfrac{M_1(A-B)}{Bl_4 - Al_5}$。

$$R_2 = G[(l_5 - l_4)h_1 - l_5h_2 + l_4h_4] + b_2 \quad (10\text{-}31)$$

式中，$G = -\dfrac{l_5}{Bl_4 - Al_5}$，$b_2 = \dfrac{BM_1}{Bl_4 - Al_5}$。

$$R_3 = F[(l_5 - l_4)h_1 - l_5h_2 + l_4h_4] + b_3 \quad (10\text{-}32)$$

式中，$F = \dfrac{l_4}{Bl_4 - Al_5}$，$b_3 = -\dfrac{AM_1}{Bl_4 - Al_5}$。

3—5 肋:有下列关系式(图 10-4)

$$h_5 = h_3 + \theta l_6 + \delta_{55}^R R_5 = 0 \tag{10-33}$$

$$R_3 + R_5 = 0 \tag{10-34}$$

$$R_5 l_6 - M_3 = 0 \tag{10-35}$$

由(10-35)式,

$$R_5 = \frac{M_3}{l_6} \tag{10-36}$$

由(10-34)式,

$$R_3 = -R_5 = -\frac{M_3}{l_6} \tag{10-37}$$

将各节点处的 L 和 R 迭加,则

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= \left(\frac{3EI_1}{l_1^3} + Dl_6\right)h_1 - Dl_5 h_2 + Dl_4 h_4 + b_1 \\
P_2 &= Gl_6 h_1 + \left[\frac{3EI_2}{l_2^3}\left(1 - \frac{l_2\mathscr{L}^2}{l_2\mathscr{L}^2 - 4l_3^2}\right) - Gl_5\right]h_2 + \\
&\quad \frac{6EI_2\mathscr{L}}{l_2(l_2\mathscr{L}^2 - 4l_3^3)}h_3 + Gl_4 h_4 + b_2 \\
P_3 &= \frac{6EI_2\mathscr{L}}{l_2(l_2\mathscr{L}^2 - 4l_3^3)}h_2 - \frac{12EI_2}{l_2\mathscr{L}^2 - 4l_3^2}h_3 - \frac{M_3}{l_6} \\
P_4 &= Fl_6 h_1 - Fl_5 h_2 + \left[\frac{3EI_3}{l_2^3}\left(1 - \frac{l_2\mathscr{L}^2}{l_2\mathscr{L}^2 - 4l_3^3}\right) + Fl_4\right]h_4 + \\
&\quad \frac{6EI_3\mathscr{L}}{l_2(l_2\mathscr{L}^2 - 4l_3^3)}h_5 + b_3 \\
P_5 &= \frac{6EI_3\mathscr{L}}{l_2(l_2\mathscr{L}^2 - 4l_3^3)}h_4 - \frac{12EI_3}{l_2\mathscr{L}^2 - 4l_3^3}h_5 + \frac{M_3}{l_6}
\end{aligned}\right\} \tag{10-38}$$

于是,梁架系统的刚度影响系数矩阵表示为:

$$
[K]=\begin{bmatrix}
\frac{3EI_1}{l_1^3}+Dl_6 & -Dl_5 & 0 & Dl_4 & 0 \\
Gl_6 & \frac{3EI_2}{l_2^3}\left(1-\frac{l_2\mathscr{L}^2}{l_2\mathscr{L}^2-4l_3^3}\right)-Gl_5 & \frac{6EI_2\mathscr{L}}{l_2(l_2\mathscr{L}^2-4l_3^3)} & Gl_4 & 0 \\
0 & \frac{6EI_2\mathscr{L}}{l_2(l_2\mathscr{L}^2-4l_3^3)} & \frac{-12EI_2}{l_2\mathscr{L}^2-4l_3^3} & 0 & 0 \\
Fl_6 & -Fl_5 & 0 & \frac{3EI_3}{l_2^3}\left(1-\frac{l_2\mathscr{L}^2}{l_2\mathscr{L}^2-4l_3^3}\right) & \frac{6EI_3\mathscr{L}}{l_2(l_2\mathscr{L}^2-4l_3^3)} \\
0 & 0 & 0 & \frac{6EI_3\mathscr{L}}{l_2(l_2\mathscr{L}^2-4l_3^3)} & \frac{-12EI_3}{l_2\mathscr{L}^2-4l_3^3}
\end{bmatrix}
\tag{10-39}
$$

若梁架系统是由四根梁、三个肋组成的结构，也可用上述类似的方法推导出它的刚度影响系数矩阵。

上面介绍的小展弦比翼面的梁架模型结构，再附以轻木维形。为避免维形用的轻木参与刚度模拟，沿弦向和展向适当分块（见图10-1）。

在低速风洞中作全机模型的颤振试验时，利用拉杆弹簧装置，模型可在风洞内作上、下平移，还可绕重心作自由俯仰、滚转等刚体运动。图 10-5 表示安装在低速风洞中的全机颤振模型（文献[66]）。在进行尾翼颤振试验时，往往需要考虑后机身的弹性影响。对于带舵机系统的舵面和调整片，操纵系统的动力特性是需要精细模拟的。

在低速风洞里，通常是用改变风速的方法来达到颤振条件的。通过安装在模型上的应变计，记录模型的结构响应，测量模型的振动频率和阻尼，最后求出颤振边界。

在颤振的临界情况下，模型作等幅振动。有时会出现这样的情况，用眼睛观察，模型发生剧烈振动，但从示波器上还不能判断颤振已经发生。此时，应先将模型固定住，再在该速度附近重复试验。

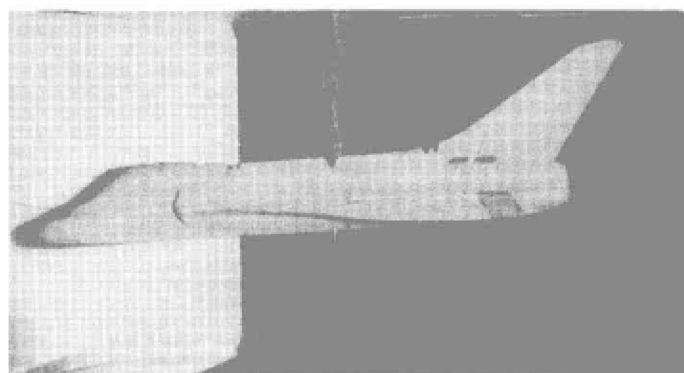


图 10-5　安装在低速风洞中的全机颤振模型

2. 跨音速和超音速风洞试验

跨音速区的理论研究还是一个极大的难题，而跨音速区的气流条件复杂，洞壁干扰效应、激波反射以及风洞气流共振等，对颤振试验结果的影响是不可忽视的。目前，对跨音速模型与风洞尺寸的关系还没有确定的标准。但加纳(Garner)推荐的风洞动态试验最小洞壁干扰的数据可供参考(表 10-2)。

表 10-2　洞壁干扰数据

项　目	模型翼展/风洞宽度	模型平面面积/风洞横截面积	模型横截面积/风洞横截面积
推荐值	≤0.4	≤0.15	≤0.01 至 0.015

这里，我们列举两个跨音速风洞颤振试验的例子，一个是全动式水平尾翼，另一个是 64°三角翼。

例 1　全动式水平尾翼具有展弦比 3.5，尖削比 0.15，在马赫数 0.75 到 1.06 作了颤振试验[76]。该模型的前缘后掠角为 30°，相对厚度为 3.5%的双凸剖面。模型的固有振型包含着重要的弦向变形。模型用厚度为 0.254 mm 的铝板作芯，再用白杉木覆盖，维持所希望的外形。模型几何和结构情况如图 10-6 所示。模型以 0°攻角安装

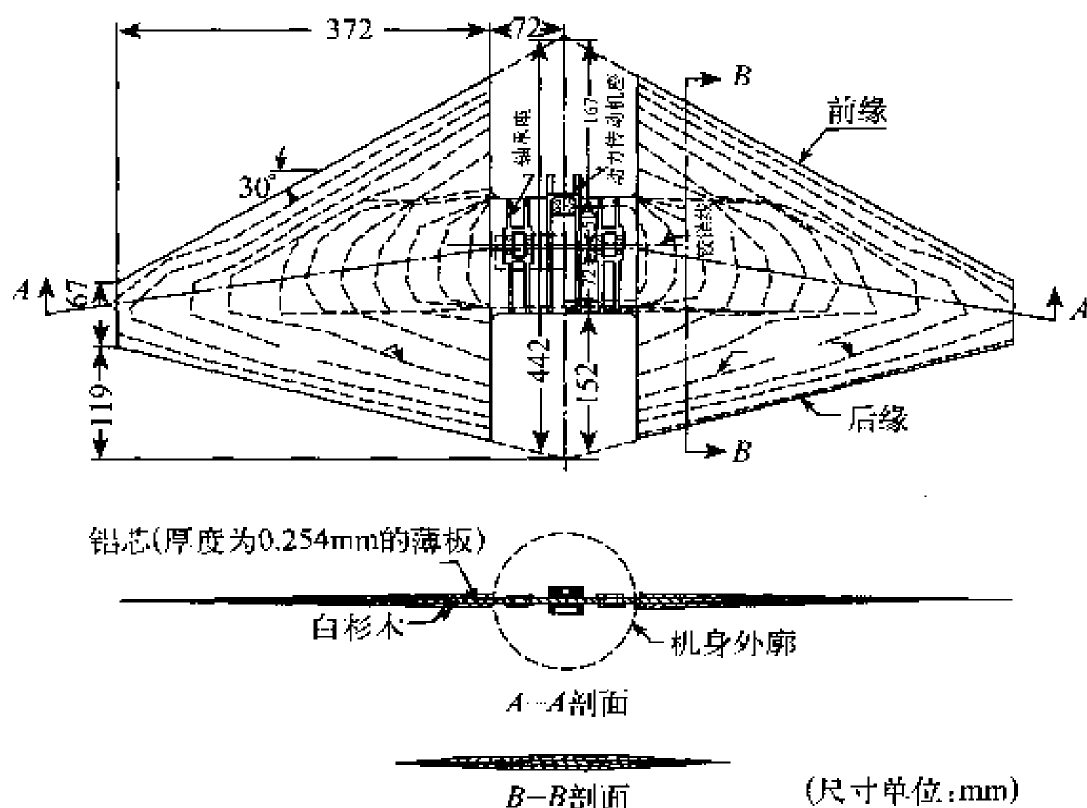


图 10-6　全动式尾翼模型结构

在直径为 140 mm 的圆柱机身上，它一直延伸到试验段的亚音速区域的上游。机身的质量比尾翼模型的质量大几倍，则可把机身视为刚体。整个模型的支承系统的振动频率为 4.3 r/s，尾翼模型的固有振动频率为：$\omega_1=40$ r/s，$\omega_2=108$ r/s，$\omega_3=117$ r/s。模型在兰利的 2.44 米跨音速压力风洞内进行颤振试验。模型上装有两组传感器，一组位于翼面根部的 50%弦长处，另一组位于 70%半翼展的 50%弦长处。在试验过程中，用示波器记录来自不同传感器的振动信号，以此确定颤振频率的大小和判断颤振的出现。在马赫数 0.75 到 1.06，获得了零升力情况的颤振点。当给定马赫数时，求颤振的方法是逐渐加大驻点压力，一直到颤振出现为止。在颤振出现后，迅速地降低马赫数和驻点压力，以确保模型不致破坏。这里的全部颤振点

是用同一模型得到的，试验结果列于表 10-3。

表 10-3 全动式尾翼的颤振试验结果[76]

试验点	M	U_f (m/s)	ρ (kg·s²/m⁴)	q (kg/m²)	ω_f (r/s)	$\frac{\omega_f}{\omega_2}$	$\mu=\frac{Mi}{4\pi\rho l^2 b_0}$
1	0.750	257	0.113	3 720	64.1	0.593	44.3
2	0.848	286	0.079 5	3 250	57.4	0.531	63.0
3	0.912	306	0.063 0	2 940	51.9	0.479	79.5
4	0.958	318	0.058 7	2 970	54.9	0.507	85.4
5	0.983	325	0.065 0	3 430	56.5	0.522	77.2
6	1.060	346	0.058 7	3 520	56.1	0.519	85.4

在马赫数从 0 到 0.98 以及质量比 μ 从 20 到 100 时，用亚音速核函数方法计算了该尾翼的颤振特性。当马赫数为 0.92 时，理论计算和试验的颤振动压和颤振频率是完全吻合的。马赫数从 0.92 到 0.98，颤振行列式的第二个解，比试验边界有着更低的动压和更高的频率。

例 2 具有气流方向的翼肋和正交梁结构的 64°三角翼[77]，全翼展为 330 毫米，翼段展长为 127 mm。机翼的固有振动频率为：$\omega_1=160$ r/s，$\omega_2=385$ r/s，$\omega_3=535$ r/s。该模型在兰利的跨音速暂冲式风洞内研究了跨音速的颤振特性。试验时使用两个 64°三角翼模型，均为流向翼肋和正交的展向梁，二者的刚度和质量不同。对于挠度较大的机翼、在马赫数从 0.79 到 1.28 的范围内求得了颤振点；对于刚硬一点的机翼，则在马赫数 0.84 到 0.97 的范围内求得了颤振点。有关试验结果的详细情况可见文献[77]。

高速风洞的颤振模型，由于风洞试验段的尺寸限制(现在用作颤振试验的风洞多半是暂冲式，试验段大小为 400～600 mm)往往只能

作部件的模型试验。在连续式高速大型风洞中才能作全机颤振模型试验。

半翼展机翼颤振模型在高速风洞试验段的侧壁呈悬臂支持，如图 10-7 所示，利用一收放装置使模型能从试验段进出(图 10-8)。

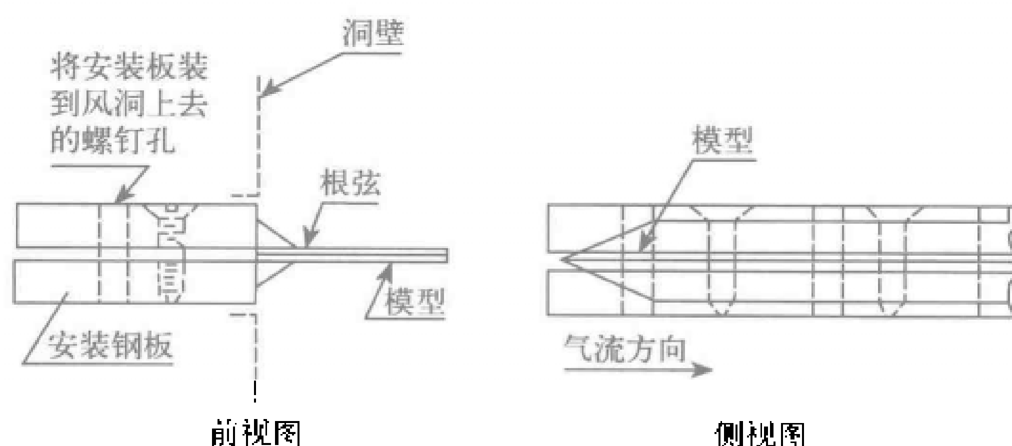


图 10-7 高速颤振模型在风洞内的安装



图 10-8 收放装置

超音速风洞试验开始时，激波对模型产生很大的启动载荷，为防止模型的破坏，用安全夹固定(图 10-9)，待风洞中的气流稳定后，再

将模型放入气流中去进行试验。图 10-10 表示一平板模型在超音速风洞内作颤振试验，这是从风洞试验段的窗口拍摄的照片。



图 10-9　模型防护的安全夹

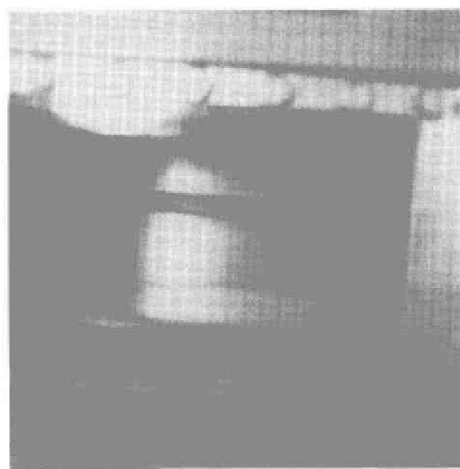


图 10-10　在超音速风洞中的平板模型

现在，我们通过一些典型例子说明高速风洞颤振试验的情况。

例 3　45°和 60°三角翼模型是用厚度为 0.865 mm 的镁板制成的，在兰利的超音速风洞内作了颤振试验研究，其结果见表 10-4。颤振曲线如图 10-11 所示，它们表示为刚度-高度参数$\frac{b\omega_\alpha}{a}\sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}}$的形式，该参数的一部分表征机翼的扭转刚度，另一部分与高度有关，所以称为刚度-高度参数。$b\omega_\alpha$ 表示机翼的扭转刚度(注意到此处的 ω_α 应为扭转振动圆频率，单位为弧度/秒，即图上所示的 ω_α 乘以 2π)，音速 a 和质量比 μ 与高度有关。其中 μ_0 为 μ 的参考值，在图 10-11 上 $\mu_0=40$。μ 表示机翼质量与圆柱体的空气质量的比值，对于三角翼，空气质量是根据母线平行于气流、直径等于根部弦长的圆锥体计算的。

表 10-4　45°和 60°三角翼模型的颤振特性[37]

平面形状＼参数	重心位置（%弦长）	机翼重量（kg）	ρ（$kg\cdot s^2/m^4$）	μ	M	U_f（m/s）	ω_1（r/s）	ω_2（r/s）	ω_3（r/s）	ω_f（r/s）
45°三角翼（152(mm)；ω_1, ω_2, ω_3）	50	0.017 7	0.037 9	52	3.00	620	49	183	257	159
	50	0.017 7	0.036 8	53	2.00	513	50	185	261	159
	50	0.017 7	0.034 8	56	1.30	391	48	180	273	150
	50	0.017 7	0.121	16	0.40	134	48	178	244	140
60°三角翼（215.9(mm)；ω_1, ω_2, ω_3）	50	0.020 6	0.033 1	42	3.00	620	67	193	342	180
	50	0.020 6	0.036 8	38	2.00	513	66	200	341	170
	50	0.020 6	0.045 8	30	1.30	391	67	190	338	172
	50	0.020 6	0.121	12	0.54	181	66	194	340	162

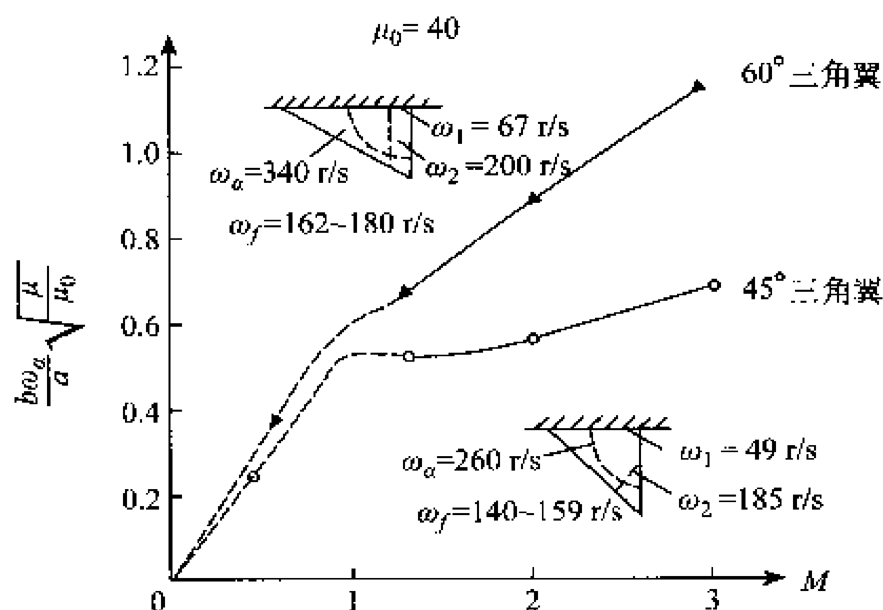


图 10-11　45°和 60°三角翼的颤振曲线

例 4　70°平板翼和截尖三角形平板翼的颤振试验研究。这两个模型的展弦比均为 0.728，根部弦长为 305 mm，后者是从外侧切去 1/3 展长。模型用厚度均为 0.813 mm 的铝合金制成，前、后缘作成尖削，长度为 2.38 mm（图 10-12）。模型用两块厚度为 12.7 mm 的钢板夹持根部，呈悬臂形式置于风洞内，如图 10-7 所示。在兰利的 230×460 mm 超音速气动弹性风洞中完成了上述两个模型的颤振试验。试验时保持马赫数不变，不断增大动压直到颤振发生或者达到风洞的极值为止。每次试验均由示波器连续记录风洞的状态和模型的振动情况。70°平板翼模型的试验速度范围为 $M=0.63\sim3.00$，截尖三角形平板翼模型的试验速度范围为 $M=1.30\sim3.00$，颤振试验结果汇总于表 10-5。刚度-高度参数 $\frac{b\omega_\alpha}{a}\sqrt{\mu}\sim M$ 曲线和颤振频率 $\omega_f\sim M$ 曲线如图 10-13 所示。其中 μ 为机翼质量与机翼所占据的体积的空气质量之比。对于三角翼，该体积是底部直径等于

表 10-5　70°平板翼和截尖三角形平板翼的颤振特性[12]

模型	M	ρ (kg·s²/m⁴)	a (m/s)	q (kg/m²)	μ	$\frac{b\omega_a}{a}\sqrt{\mu}$	ω_1 (r/s)	ω_2 (r/s)	ω_3 (r/s)	ω_4 (r/s)	ω_f (r/s)
70°平板翼	0.63	0.079 3	335.8	1 771	17.17	0.54	78	183	325	395	166
	0.64	0.076 0	333.2	1 728	17.93	0.52	72	171	320	367	150
	0.75	0.068 8	331.9	2 128	19.80	0.60	78	186	320	398	157
	0.79	0.077 5	328.3	2 596	17.58	0.59	79	193	350	396	150
	0.88	0.070 8	326.1	2 918	19.20	0.60	78	186	322	398	140
	0.96	0.067 5	320.3	3 182	20.18	0.63	79	186	331	398	140
	0.96	0.070 4	320.9	3 343	19.30	0.63	79	192	350	402	142
	1.01	0.052 6	316.7	2 708	25.67	0.68	78	178	342	388	148
	1.19	0.040 0	308.8	2 698	34.00	0.82	77	181	320	367	133
	1.30	0.041 4	298.7	3 138	32.98	0.78	75	170	305	367	150
	1.64	0.038 8	278.9	4 046	35.12	0.88	76	173	318	372	160
	2.00	0.031 1	259.1	4 128	43.67	1.06	75	173	320	379	153
	2.55	0.034 2	234.7	6 168	39.70	1.11	76	173	320	375	160
	3.00	0.038 7	219.8	8 408	35.10	1.12	75	174	325	383	161

续表

模型	M	ρ (kg·s²/m⁴)	a (m/s)	q (kg/m²)	μ	$\frac{b\omega_\alpha}{a}\sqrt{\mu}$	ω_1 (r/s)	ω_2 (r/s)	ω_3 (r/s)	ω_4 (r/s)	ω_f (r/s)
截尖三角形平板翼	1.30	0.033 0	298.4	2 484	38.67	0.95	35	95	183	209	93
	1.64	0.030 6	279.8	3 221	41.79	1.11	35	100	188	208	102
	2.00	0.038 0	258.2	5 070	33.55	1.13	36	105	197	233	94
	2.55	0.042 0	236.8	7 710	30.40	1.23	35	110	196	232	100
	3.00	0.034 4	219.5	7 481	37.08	1.45	34	109	193	233	105

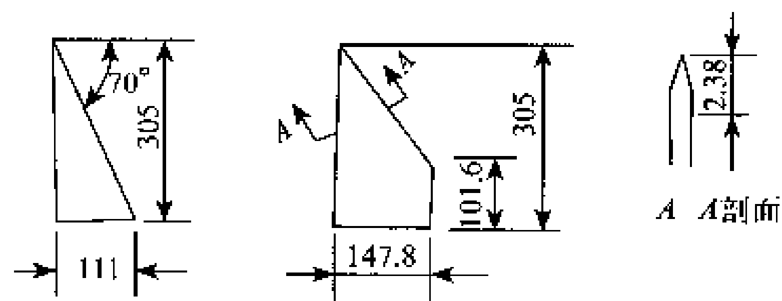
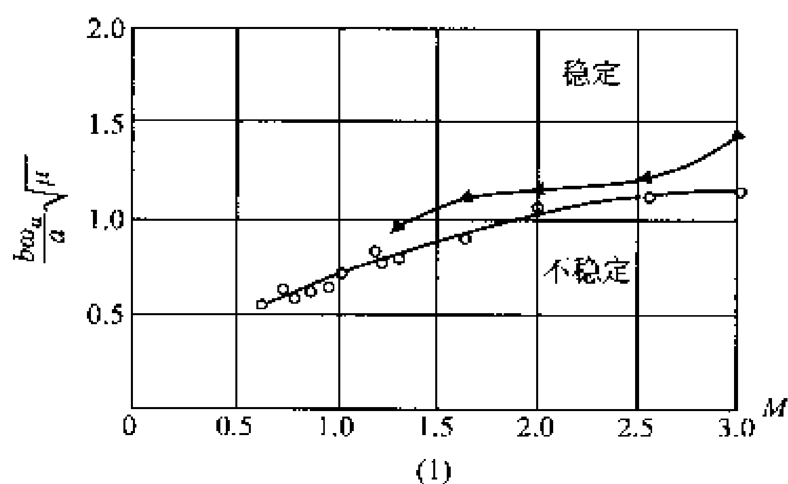


图 10-12 70°平板翼和截尖三角形平板翼模型的几何形状(单位:mm)



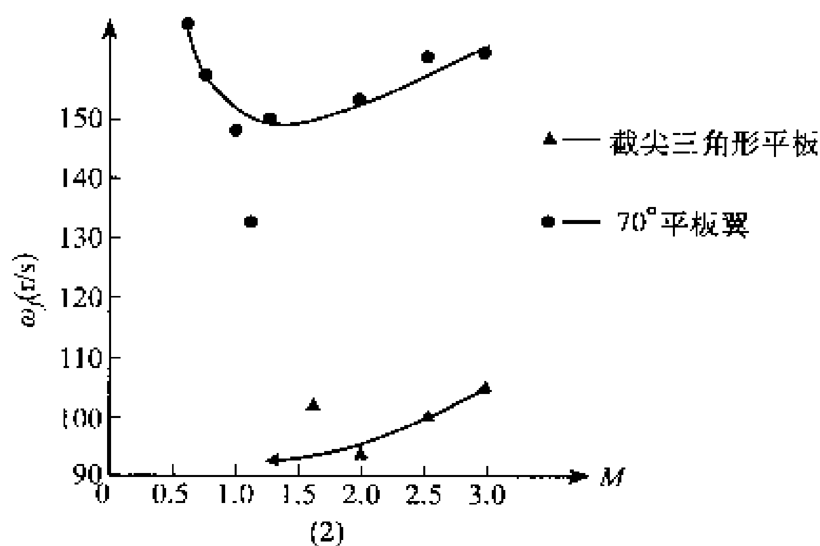


图 10-13 70°平板翼和截尖三角形平板翼的颤振曲线

根弦(平行于气流方向)的圆锥体积;对于截尖三角形翼,该体积是直

径等于根弦和梢弦(平行于气流)的一个截头锥体积。此外,70°平板翼的总重为 0.036 kg,截尖三角形平板翼模型总重为 0.065 kg。

在所有的马赫数下,截尖三角形平板翼发生颤振时的刚度—高度参数大于三角形平板翼。表 10-5 中列举了模型的各阶固有振动频率,它们是通过装在模型根部大约 70%弦长处的电阻丝应变仪电桥记录的。在各试验点,固有频率所存在的差别可能是由于模型根部安装的紧度造成的。

例 5　全动式方形模型和梯形模型的颤振试验。方形模型在 $M=0.7\sim6.86$ 作了试验,梯形模型在 $M=0.7\sim3.98$ 内作了试验。

方形模型是一组带轴的全动式操纵面、展弦比为 1.0,翼展为 102 mm。模型用矩形剖面、76.3 mm 长的轴支持。轴有着三种不同的厚度,使得它具有三种不同的刚度水平。该模型由不锈钢芯和一个主轴组成,粘结轻木以构成所需要的翼型形状(见图 10-14),在金属芯上打孔,填充铅作配重。方形模型的俯仰轴在 35%弦长处,板的重心位于 53.5%弦长以及 50%半翼展。我们列举一组模型(编号为 0—9—47—())的试验结果见表 10-6。共用五个相同的模型完成跨音速、超音速以及高超音速的试验项目。$M=0.7\sim1.17$ 的试验是在兰利的 610 mm 跨音速气动弹性风洞内进行的,$M=1.3\sim3.98$ 的试验在兰利的 230×460 mm 超音速气动弹性风洞内进行的,$M=6.83$的试验在兰利的280mm高超音速风洞内完成的。在文献

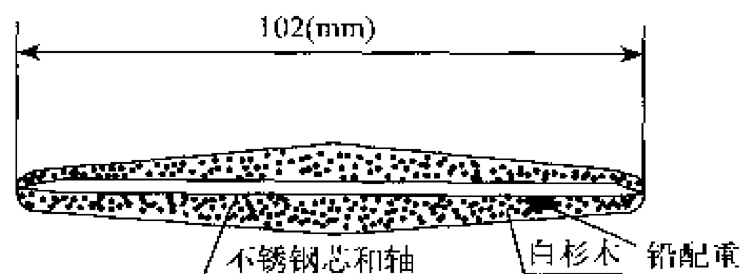


图 10-14　方形模型结构

表 10-6　方形模型的颤振试验结果[78]

模型编号	M	ρ (kg·s²/m⁴)	a (m/s)	q	μ	$\frac{1}{6}\frac{\pi b\omega_a}{a}\sqrt{\mu}$	ω_1 (r/s)	ω_2 (r/s)	ω_f (r/s)
0—9—47—4	0.97	0.068 9	156	807	144	1.62	20.2	66.2	24.5
	1.01	0.058 3	157	744	170	1.75			27.0
	1.07	0.050 4	157.3	724	197	1.88			26.0
	1.14	0.044 1	157.3	720	225	2.01			26.0
—3	1.17	0.050	156	841	199	2.11	20.2	66.8	28.5
—5	2.00	0.016 1	260	2 160	623	2.05	20.4	67.0	40
—1	3.00	0.016 2	214	3 320	616	2.46	20.2	66.2	40
—3	3.98	0.013 9	181	3 610	696	3.07	20.2	66.1	38
—2	6.83	0.002 98	264	4 840	3 345	4.74	20.5	68.0	37

注：模型编号 0—9—47—()，0 表示前、后缘半径为 0%弦长；9 为最大厚度，即 9%弦长；47 表示$\frac{47}{1\,000}$时的轴厚；最后一位数字为模型的组号。

[78]中，使用$\frac{1}{6}\ \frac{\pi b\omega_a}{a}\sqrt{\mu}$作为刚度—高度参数，$b$ 为机翼的半弦长，ω_a 为机翼的扭动振动频率(r/s)，μ 为质量比，a 为音速。刚度—高度参数随马赫数的变化如图 10-15 所示。

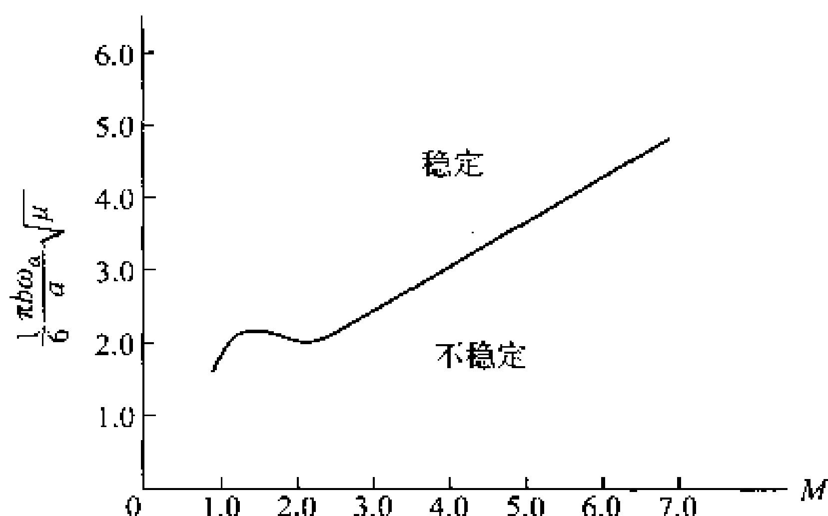


图 10-15　方形模型的刚度-高度参数随马赫数的变化

梯形模型的展弦比为 1.493，尖削比为 0.50，后掠角为零，半翼展为 165 mm，根弦长 148 mm，模型安装在弹簧片上，允许有俯仰和朴振自由度。该模型具有菱形和楔形翼型(见图 10-16)，俯仰轴位于 37%根弦，朴振轴位于根弦内侧的 9%外露半翼展。梯形模型结构是由铝芯和泡沫塑料组成的，铝芯模拟结构刚度，泡沫塑料与铝芯粘结维持翼型外形，模型后缘加铅配重，以调整惯性参数。我们取翼型厚度为 6%弦长的模型为例，$M=0.68\sim3.98$ 的颤振试验结果见表 10-7。刚度-高度参数$\frac{1}{6}\ \frac{\pi b\omega_a}{a}\sqrt{\mu}$(对于梯形模型，$b$ 取自 75%半翼展)随马赫数的变化曲线如图 10-17 所示。

表 10-7　梯形模型的颤振试验结果[78]

	模型编号	M	ρ (kg·s²/m⁴)	a (m/s)	q (kg/m²)	μ	$\frac{1}{6}\frac{\pi h\omega_u}{a}\sqrt{\mu}$	ω_1 (r/s)	ω_2 (r/s)	ω_3 (r/s)	ω_f (r/s)
菱形模型	6D-2	0.68	0.156	152	830	63.4	0.947	21	63	254	38
		0.73	0.132	152.5	822	77.0	1.044				38
		0.78	0.114	153	820	87.0	1.098				37
		0.83	0.098 3	153	792	101	1.190				34
		0.89	0.082 5	153	774	120	1.292				32
		0.94	0.068 0	153	705	146	1.430				30
		0.98	0.059 6	153	675	166	1.514				29
		1.03	0.051 0	153	610	194	1.642				27
		1.07	0.048 6	153	665	204	1.687				27
		1.13	0.046 5	154	735	213	1.708				28
	6D-1	1.30	0.016 5	302	1 270	599	1.716	24	73	267	50
		1.64	0.021 0	283	2 270	472	1.645	25	74	268	46
		2.00	0.024 2	264	3 410	409	1.687	24	76	268	47
		2.55	0.024 1	236	4 375	411	1.915	25	77	268	50
		3.00	0.021 5	217	4 540	460	2.088	25	73	270	50
		3.00	0.023 3	218	4 975	425	2.050	24	75	268	47
	6D-3	3.98	0.009 64	180	2 470	1 028	2.532	17	49	248	30

续表

模型编号		M	ρ ($kg \cdot s^2/m^4$)	a (m/s)	q (kg/m^2)	μ	$\frac{1}{6}\frac{\pi b\omega_a}{a}\sqrt{\mu}$	ω_1 (r/s)	ω_2 (r/s)	ω_3 (r/s)	ω_f (r/s)
楔形模型	6W-2	0.70	0.122	153	710	64.0	1.103	26	73	261	46
		0.76	0.105	153	710	74.1	1.186				44
		0.81	0.086 6	153	680	89.8	1.307				40
		0.86	0.069 8	154	631	111.5	1.444				39
		0.92	0.056 1	154	563	138.8	1.618				36
		0.97	0.044 3	156	514	175.5	1.792				33
		1.02	0.037 2	156	480	209.0	1.955				33
		1.06	0.034 2	154	495	228.0	2.065				33
		1.15	0.038 8	156	636	200.0	1.913				33
	6W-1	1.30	0.023 3	303	1 805	334	1.518	29	87	270	60
		1.64	0.027 2	283	2 930	286	1.487	26	86	270	61
		2.00	0.029 3	264	4 090	265	1.584	28	89	270	59
		2.55	0.031 7	238	5 810	245	1.670	28	88	270	60
		3.00	0.030 6	219	6 630	254	1.850	28	88	268	54
	6W-3	3.98	0.015 3	183	4 070	508	2.143	19	60	252	37

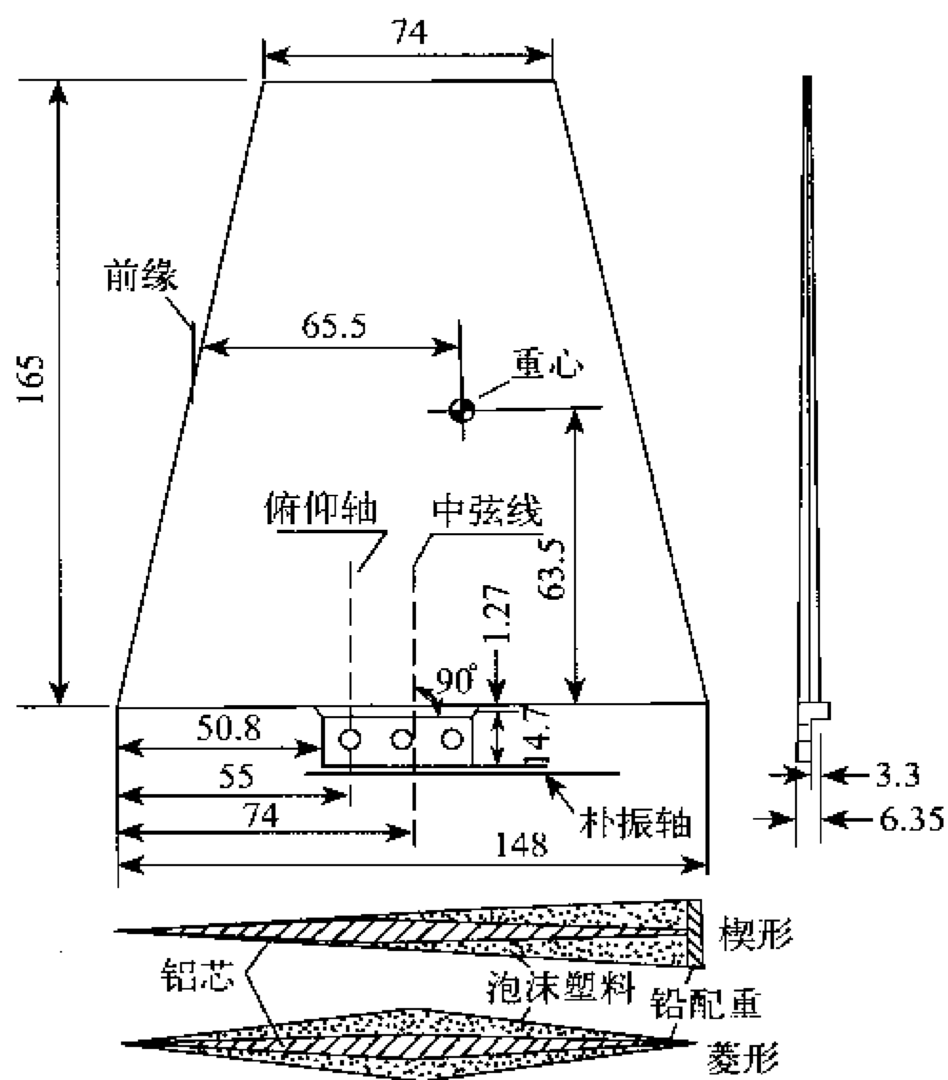


图 10-16 梯形模型结构和几何尺寸(单位:mm)

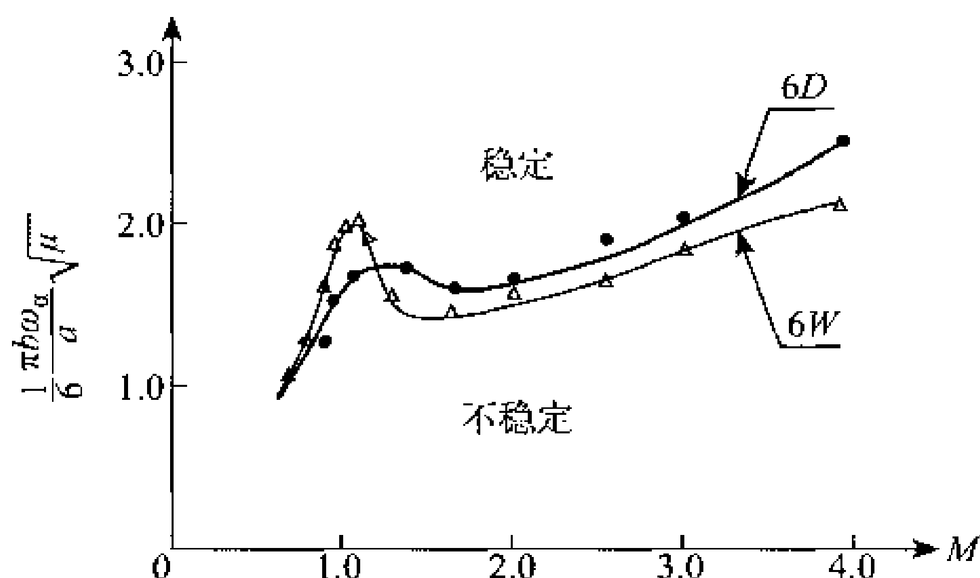


图 10-17　梯形模型的刚度—高度参数随马赫数的变化

在文献[78]中，共研究了两类模型。一类模型的前、后缘半径为0～6%弦长和厚度为9%、11%、14%和20%弦长的正方形；另一类模型具有楔形和菱形翼型，厚度为3%、6%、9%和12%弦长的梯形。试验表明，通常在高马赫数下，增加厚度有着降低稳定性的影响，而在亚、跨音速马赫数下，则是稳定的。在相当的刚度水平下，菱形翼型较楔形翼型更易于发生颤振。为满足气动力加热的要求，广泛采用前缘钝头翼型，在超音速时，增加翼型的前缘钝度对颤振边界有着稳定的影响。

有关风洞颤振试验的相关技术，可参阅文献[79]。

§ 2. 地面发射火箭的颤振试验

当模型具有与实际的飞行器(部件)相似的气动力外形、结构刚度和质量分布时，飞行中的颤振现象除了在风洞中进行试验研究之外，还可把模型放在大气中使颤振条件再现。

现在，我们介绍地面发射火箭的颤振试验。大多数地面发射火箭用作飞行器部件的比例模型从发射高度到 1 500 m 以内的试验，此时，空气密度只有很小的变化。颤振模型安装在火箭上，依靠火箭推力作弹道飞行。模型上的振动传感器把振动信号通过导线传递给火箭壳体内的中间装置，将机械讯号变成电讯号，经遥测发射机把讯号经天线发送给地面接收站。地面接收站从火箭发射之后，就开始记录从火箭发来的无线电讯号，一直到颤振模型破坏为止。整个遥测过程用一简单的方块图表示，如图 10-18。地面接收站记录了模

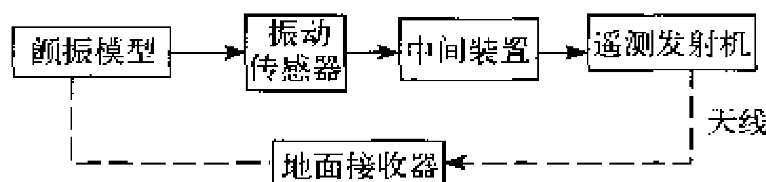


图 10-18 遥测过程的方块图

型振动的时间过程，由此可确定模型的颤振频率和模型破坏的时刻(这里，图 10-19 给出了一机翼模型破坏时的部分遥测记录)。至于火箭的飞行速度- 时间曲线可从多普勒雷达取得，它设置在火箭发射场地的附近，由发射讯号与接收讯号的频率差可测定火箭远离多普勒雷达的绝对速度。作为示例，若基本的发射频率为 212×10^6 r/s，发射讯号和接收讯号的频率差从 0 到 1 000 r/s，则对应的飞行速度范围从 0 到 708 m/s。要求出火箭的真实气流速度，需从雷达测得

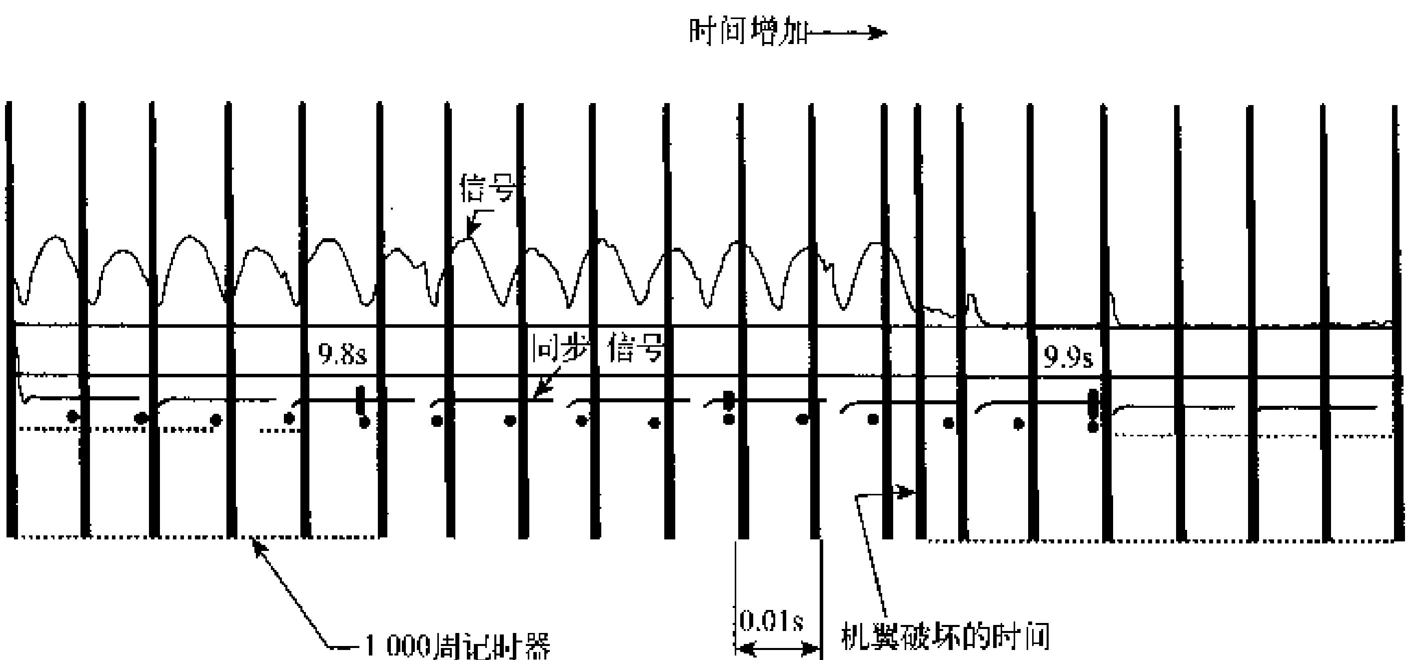


图10-19　表示机翼破坏时间的部分遥测记录[80]

的速度中减去风速等。火箭的飞行弹道可用带望远镜的高速摄影机进行拍摄。

在选用火箭上的遥测装置和振动传感器等，以及设计颤振模型时，应考虑到要承受 50 g 的纵向加速度。火箭一经发射出去，就不可控制。通常，每次试验都要损坏模型。因此，为了弄清楚设计当中的某一特定问题，需要一组模型。试验以后，应尽可能将模型回收，以确定模型颤振破坏的形式。最好在火箭上安装一个时间继电器，按照试验程序在预定的时间和地点，让时间继电器工作，打开降落伞舱盖，使降落伞支持整个火箭壳体的重量，在近地面的高度徐徐下落，避免火箭壳体与地面碰撞而毁坏。

试验完毕之后，剩下的问题就是对飞行试验中的记录进行分析。模型在试验中的振动记录有着不同的特征，图 10-20 表示了典型记录的基本特征。这里，我们把记录理想化了，只给出了很少的几周，而实际的记录往往是很长的。此外，为了清晰起见，略去了背景的干

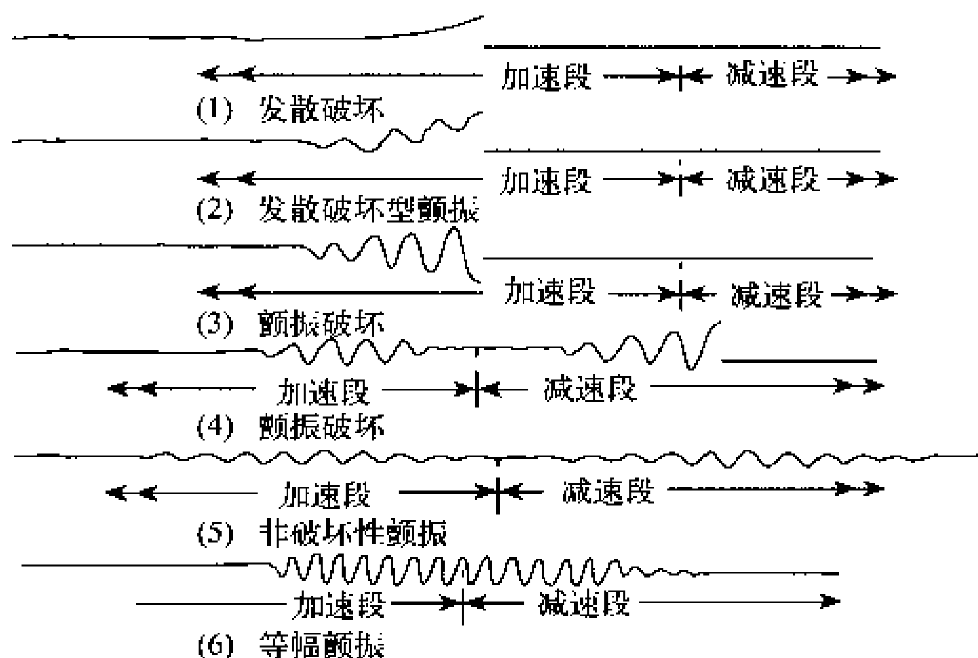


图 10-20　飞行特征的典型记录

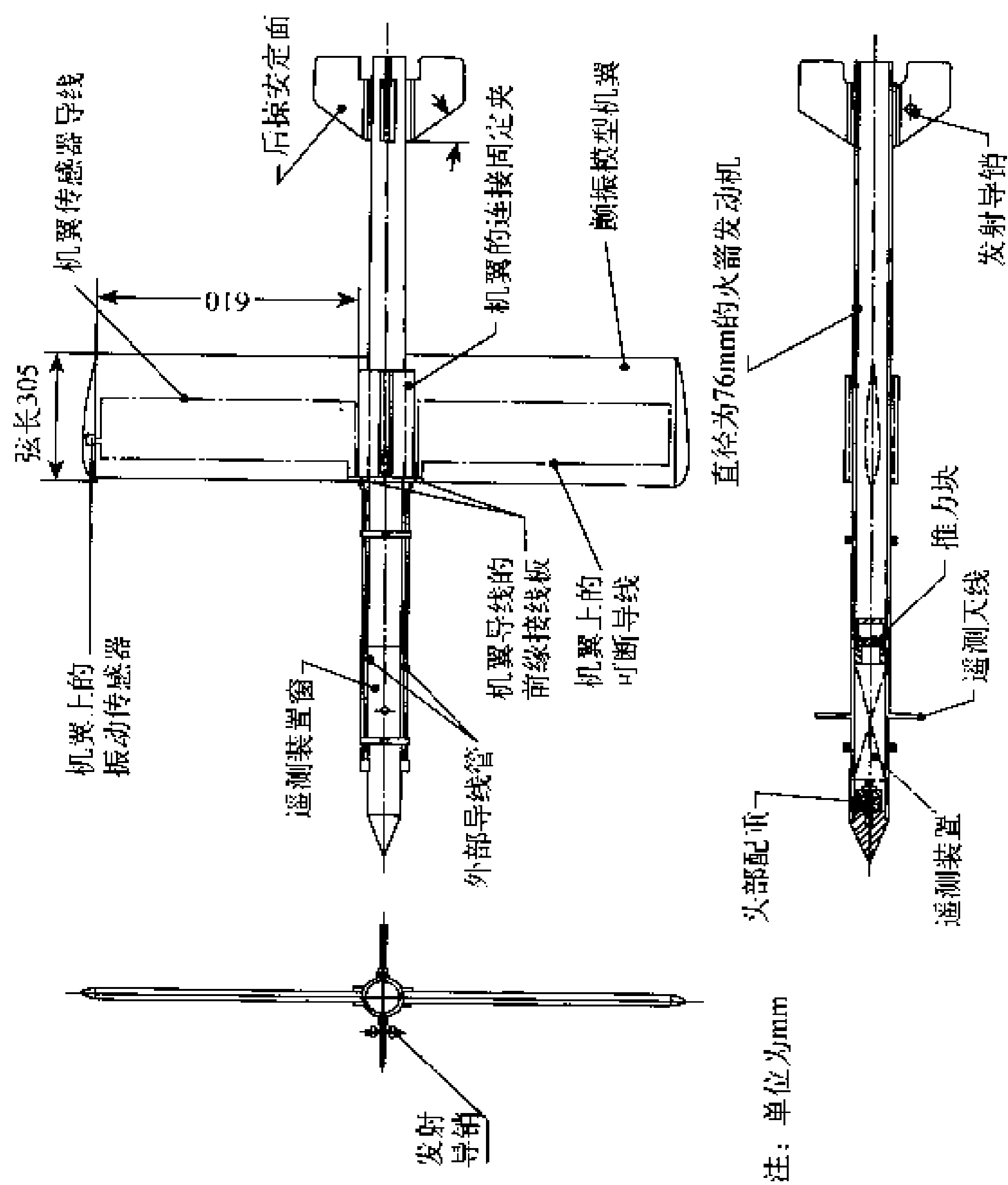
扰和标准记时波。图 10-20(1)表示发散破坏。显然,发散属静气动弹性现象,与颤振无关。当火箭速度增加时,讯号出现迅速的漂移,即出现发散,这是颤振模型偶然出现的一种破坏形式。图 10-20(2)表示发散破坏型颤振,这是模型开始颤振时的记录。但是,当速度增加到颤振还不足以引起模型破坏之前,发散是主要的,最终的破坏多半是由发散造成的。图 10-20(3)表示很确定的颤振记录,模型在加速过程中破坏。图 10-20(4)表示模型在加速段通过颤振边界区的记录。加速时,在低马赫数边界开始颤振,但是在模型破坏之前,就达到了高马赫数。随着火箭速度的增大,振动逐渐消失。在减速段的上边界又开始颤振,并导致破坏。该记录提供了有价值的颤振上、下边界的资料。图 10-20(5)表示几个振动短脉冲的记录,但不能确定它就是颤振。大多数情况认为该记录表示初始的颤振条件,或者称为非破坏性颤振。图 10-20(6)表示从加速段开始颤振,但振幅不增大。除了速度明显增加导致机翼破坏之外,模型一直作等幅振动。

现在,我们按照不同的模型平面形状,列举数例加以说明。

例 1　非后掠翼的火箭颤振试验。文献[81]给出了非后掠平直机翼的颤振模型在马赫数 0.4 到 1.0 范围内的试验结果。目的在于确定火箭加速度和空气压缩性对机翼颤振特性的影响以及确定空气压缩性对机翼扭转刚度指标的影响。试验用的火箭如图 10-21 所示,火箭的重心在机翼前缘,保证火箭在飞行过程中具有足够的俯仰稳定性。试验中使用两种大小不同的火箭体,其参数见表10-8。火

表 10-8　非后掠翼火箭参数

火箭直径 (mm)	发射重量 (kg)	动力飞行时间 (s)	纵向加速度 (g)	最大飞行速度 (m/s)
76	25	1.6	24	366
127	64	1.6	40	610



注：单位为mm

图10-21 非后掠翼的火箭试验模型[81]

箭上装有频率为 465×10^{6} r/s 的单道遥测发射机，重量为 1.13 kg，如图 10-22 所示。调制为$(150\pm15)\times10^{3}$ r/s 的频率，被地面接收站连续地记录。利用多普勒装置获得模型的速度，讯号从地面发射站以 212×10^{6} r/s 传送到模型，再反射到地面接收站，发射和接收讯号

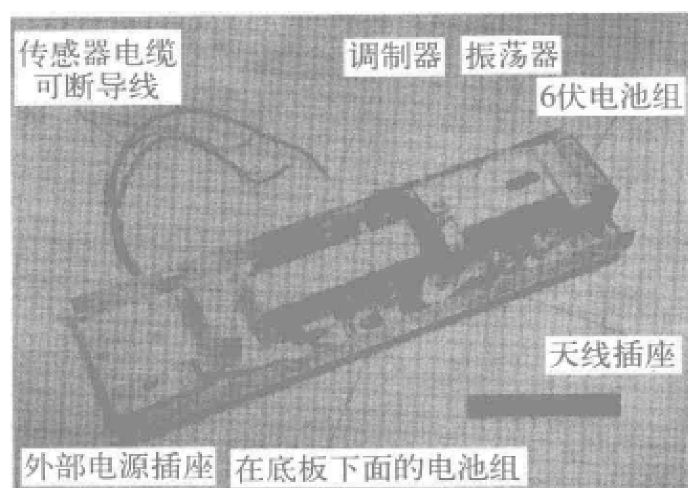


图 10-22　火箭弹体上遥测发射机[81]

的频率差就是模型离开地面雷达的速度测量。0 到 1 000 r/s 的频率差范围对应着 0 到 708 m/s 的飞行速度。振动传感器为可变电感加速度型，它的频率范围为 100 r/s 以内，加速度为$\pm20\ g$，传感器的结构情况和几何尺寸图 10-23 所示。为了减少振动传感器对颤振模型的惯性影响，应尽可能地减小传感器的体积和重量。振动传感器和可断导线嵌入在颤振模型内，它们把振动讯号传给遥测装置，再发射给地面接收站。火箭在试验之前应平稳地安放在发射架上，如图 10-24 所示。发射出去以后，在空中发生颤振破坏时的情况如图 10-25 所示。根据遥测数据整理得到的机翼模型的颤振结果见表 10-9。机翼模型振动时的部分遥测记录如图 10-26，由多普勒装置测得的(颤振)速度—时间曲线如图 10-27。在所研究的加速度和马赫数的范围内，纵向加速度对颤振的影响是可忽略的。空气压缩性对

表 10-9 非后掠翼模型的颤振结果[81]

颤振频率 (r/s)	模型的颤振开始速度 (m/s)	模型破坏速度 (m/s)	模型颤振时的加速度 (g)
58	198	232	26

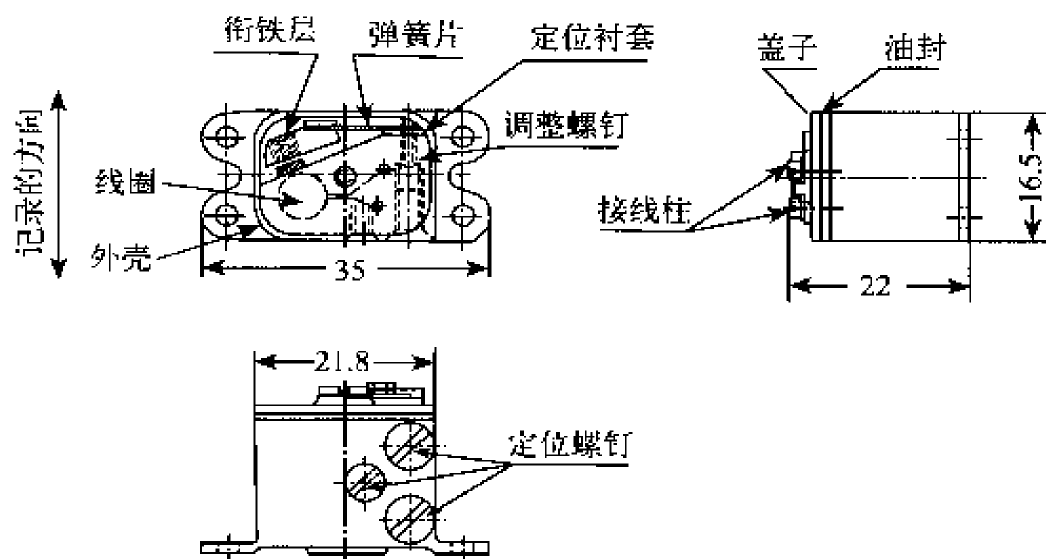


图 10-23 振动传感器(单位:mm)

颤振速度的影响:在 $M=0.4$ 时为 -50%,$M=0.9$ 时减小到 -25%;空气压缩性对颤振频率的影响是使它接近于机翼的弯曲频率。在机翼的扭转刚度指标中,引进葛劳涅函数 $\phi(M)=(1-M^2)^{1/4}$,能给出十分接近于试验的结果。

文献[82]对大展弦比非后掠翼用高速火箭推进飞行器(NACA) FR-2 作了跨音速颤振试验。火箭的结构和几何尺寸如图 10-28 所示。当飞行器的速度接近音速时,试图预测从跨音速到超音速范围内的颤振条件。美国国家航空咨询委员会曾用兰利气动弹性风洞、自由下滑模型、低速火箭以及高速火箭研究了该问题。在高速火箭颤振试验中,共用了四个模型。模型 1 和 2 用作考验发射和稳定,模型 3 和 4 用来作颤振试验,二者具有相同的特性。机翼模型的重量



图 10-24　非后掠翼火箭在发射架上[81]

为0.807 kg，展弦比为 6.8（包括机身面积），机翼的重心位置为 46.4%弦长，弹性轴位置为 31%弦长。采用固体火箭发动机作为动力，总重为 40 kg，其中装药重量为 11 kg，火箭的发射重量为 55 kg，火箭发动机推力为 2 270 kg，动力飞行时间为 1 s，火箭的最大速度为 $M=1.7$。火箭的发射角为 60°，图 10-29 表示该模型火箭安放在发射架上的情况。在机翼未产生颤振之前，遥测发动机不断地向地面接收站发回模型的振动讯号；机翼颤振破坏后，遥测装置即停止工

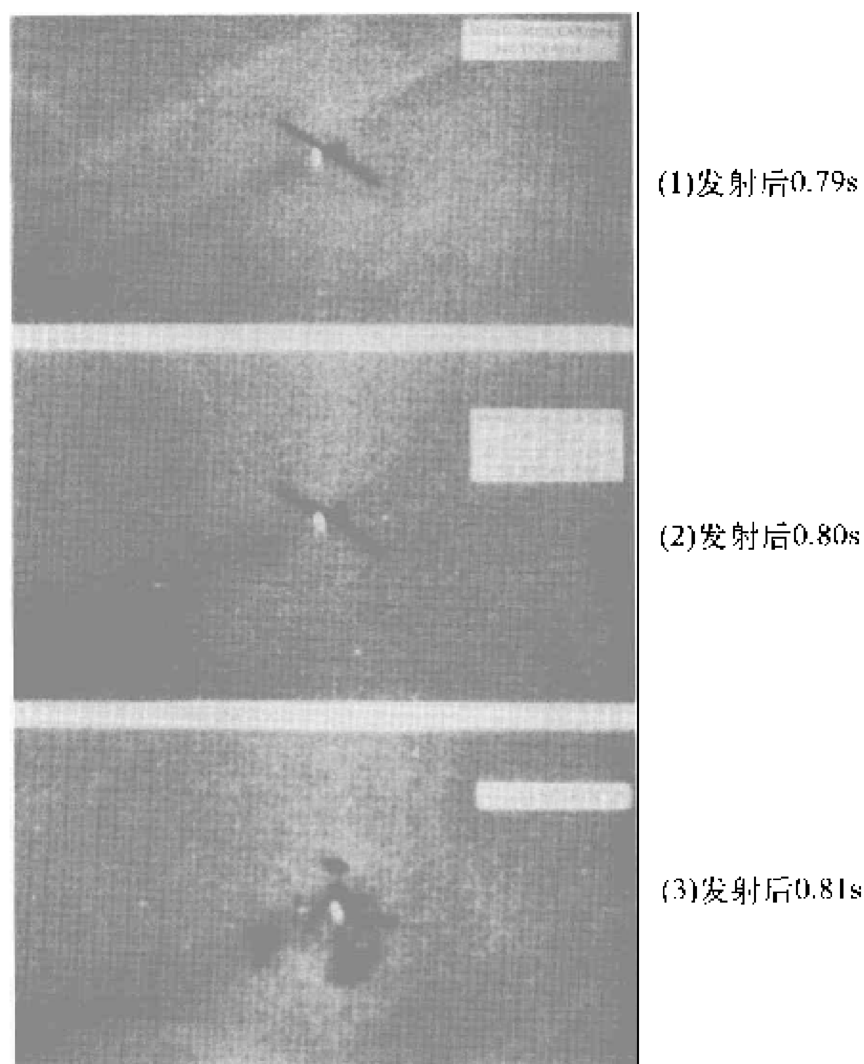


图 10-25　颤振模型在空中破坏时的摄影照片[9]

作。模型火箭的飞行用多普勒雷达跟踪，测定速度。模型 3 和 4 均在 $M=0.89$ 时破坏，但破坏的形式有所不同（见图 10-30）。机翼模型破坏时的参数见表 10-10。利用二元不可压缩流理论进行了分析计算，颤振速度为 236 m/s，而试验结果 $U_f=301$ m/s，比理论计算值大 28%，这是由于没有考虑空气压缩性、颤振挠曲形态、展弦比的影响。

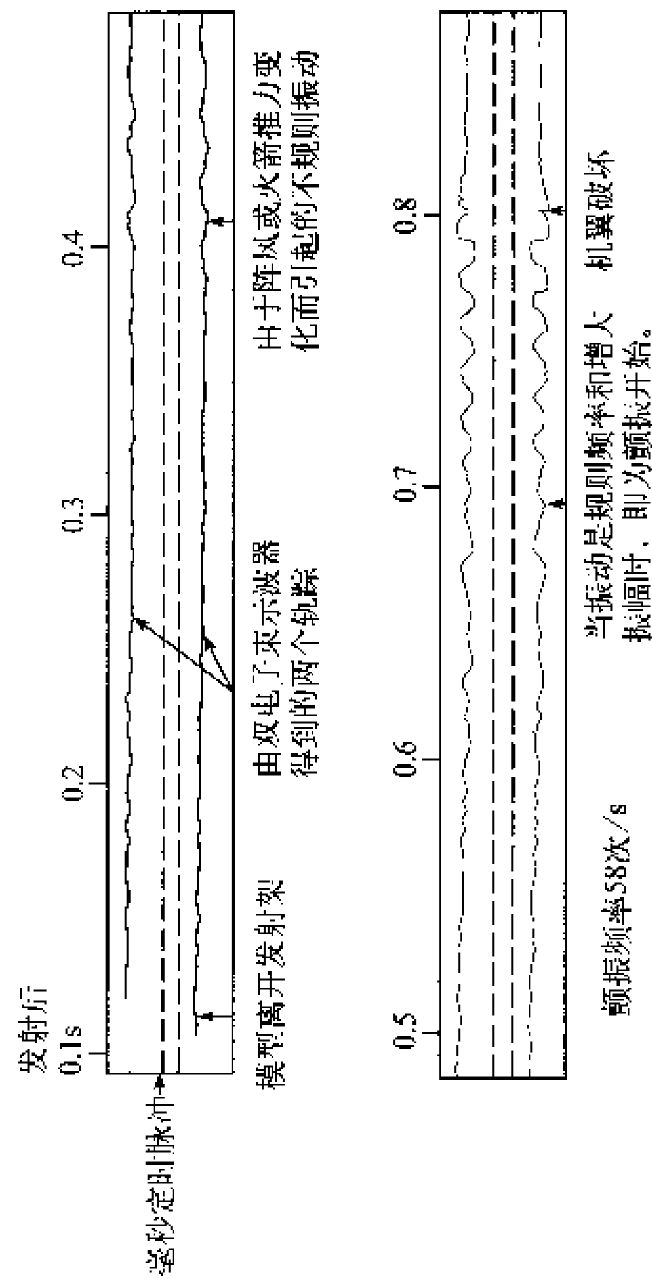


图10-26 机翼振动时的遥测记录

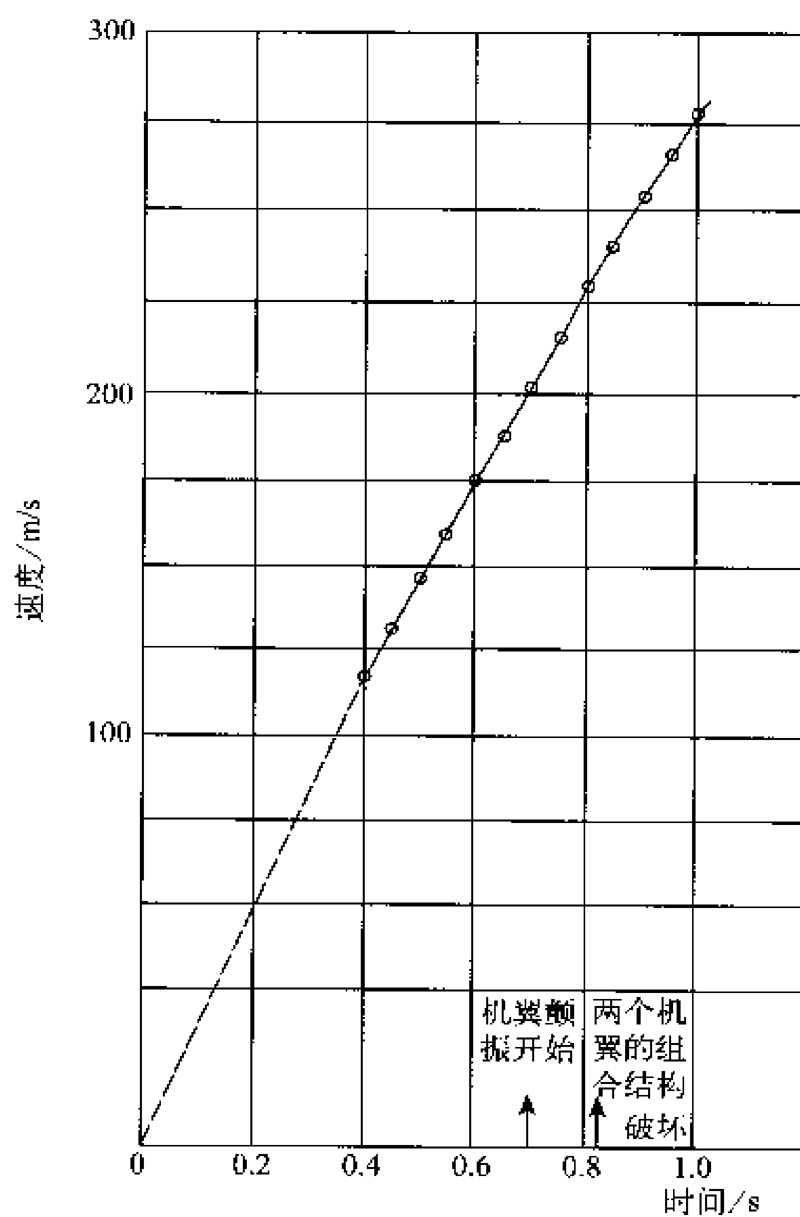


图 10 27　速度　时间曲线

表 10-10　模型 3 和模型 4 颤振破坏时的参数[82]

模型＼参数	马赫数 M	速度 U_f (m/s)	动压 q (kg/m²)	空气密度 ρ (kg·s²/m⁴)	点火后时间 (s)	加速度 (g)
—3	0.89	301	5 650	0.125	0.64	52.0
—4	0.89	301	5 650	0.125	0.62	52.5

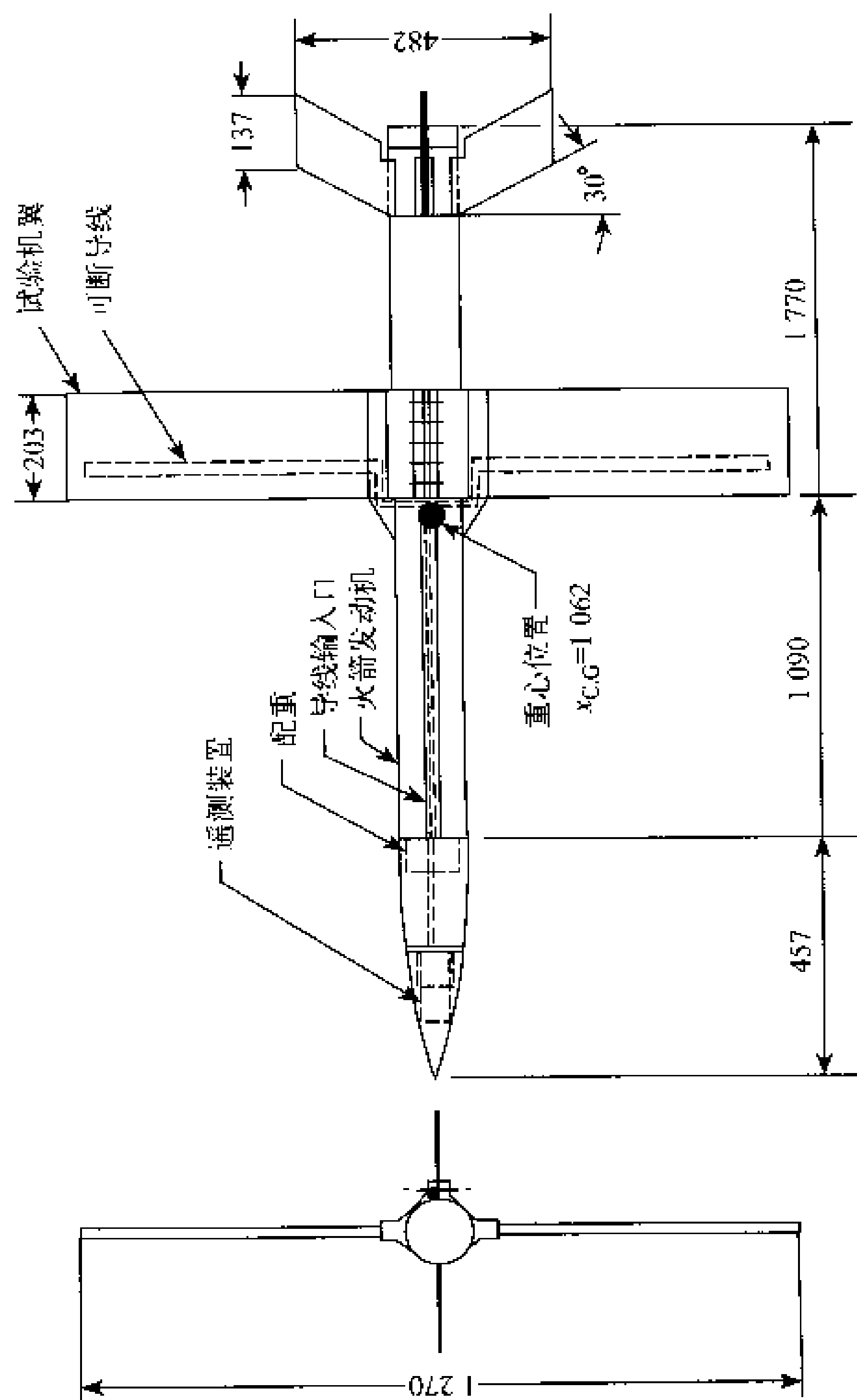
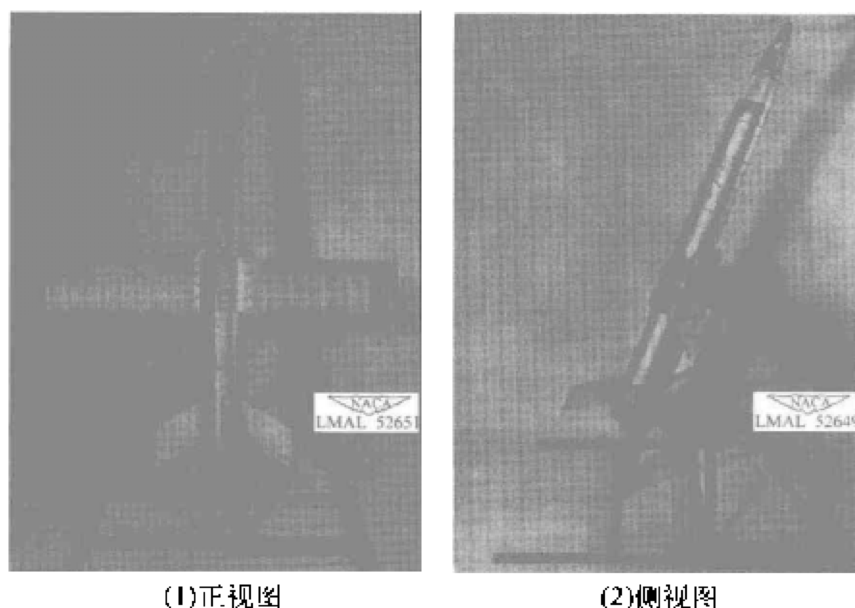


图10-28　高速火箭FR-2的结构和几何尺寸[82]



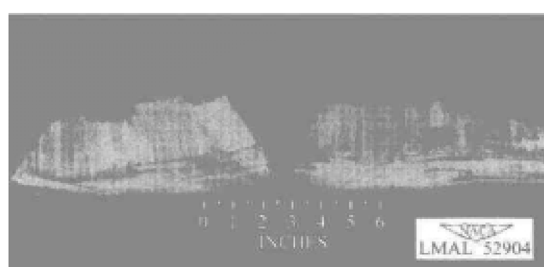
(1)正视图　　(2)侧视图

图 10-29　火箭 FR-2 在发射架上[82]

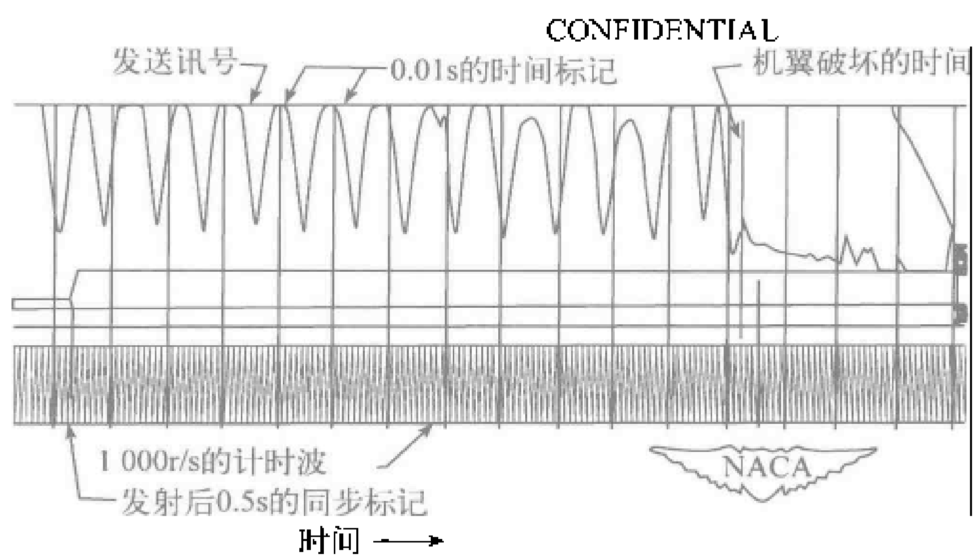
例 2　后掠翼的火箭颤振试验。文献[80]就后掠翼模型用低速火箭 FR-1-A 作了跨音速颤振试验研究。火箭的三面图如图 10-31 所示，四个尾翼中的两个水平尾翼是作颤振试验机翼、两个垂直尾翼是作方向稳定用，其颤振速度大于火箭的最大速度。机翼是用云杉层板作成的，水平翼重 2.72 kg，展弦比为 3.7。火箭的发射重量为 112 kg，火箭推力为 454 kg，平均加速度为 2.8g，飞行时间为 15 s，速度范围为 $M=0.7\sim1.2$。图 10-32 为火箭平放在托架上的两张照片。火箭按倾角 63°～39°作零长发射，图 10-33 给出了发射时的照片，时间间隔近似为 1/4 s。火箭飞行中的照片如图 10-34 所示。为了确定模型的破坏速度，在每一个试验机翼上用导线形成了简单的可断导线回路，该导线与安装在火箭头部的遥测装置的电源连接。当某一机翼模型破坏时，讯号便突然减小为零，由此可知模型的破坏点(见图 10-19)。从飞行中的照片断定左翼靠近根部破坏，时间是发射后的 9.875 s，此时的马赫数为 0.89。按二元非后掠、不可压缩流理论计算的颤振速度为 $M=0.505$，利用余弦修正(近似的后掠修正)，使试验结果($M=0.89$)只比计算的颤振速度大 24.3%。右翼一直保存到最大马赫数 1.0。



(1)模型3



(2)模型4



(3)模型4破坏时的部分遥测记录

图 10-30　模型破坏后的残骸和破坏前后的部分遥测记录[82]

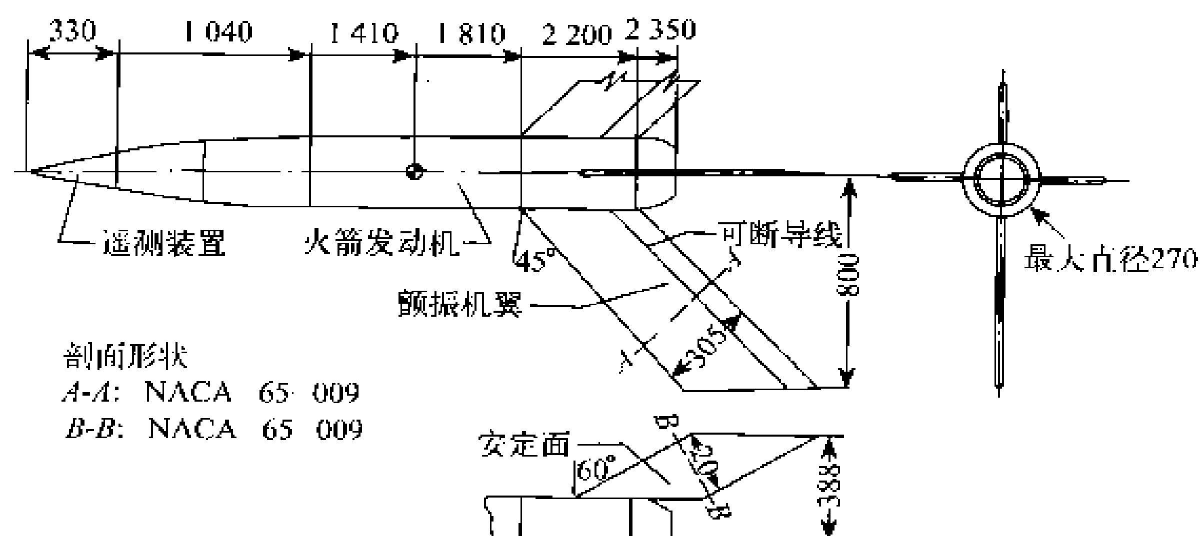
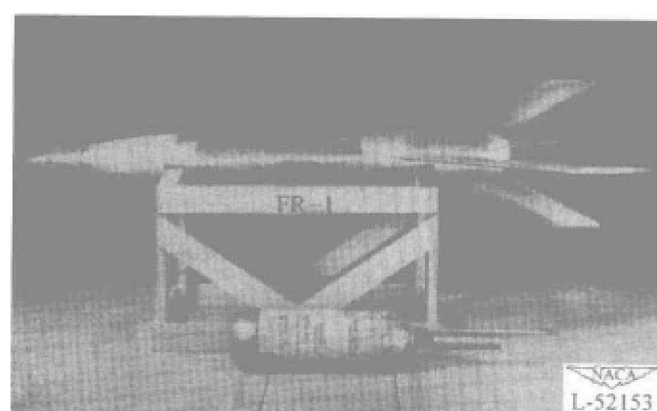


图 10-31 后掠翼火箭(FR-1-A)的三面图[80]



(1)侧视图



(2)俯视图

图 10-32 火箭(FR-1 A)平放在托架上

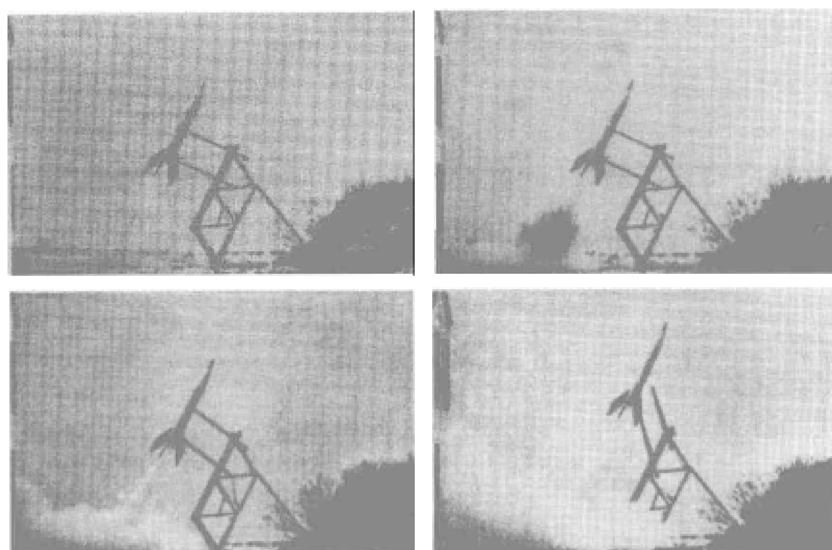
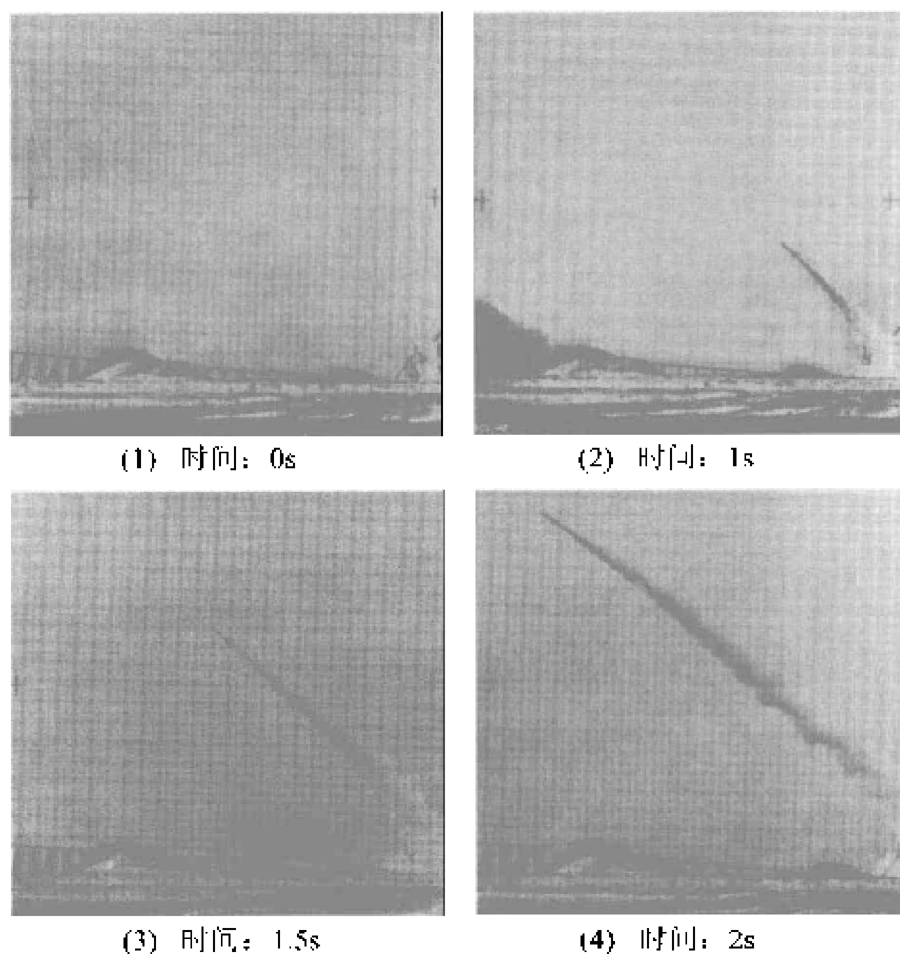


图 10-33　火箭(FR-1-A)发射时的情况[80]



(1) 时间：0s　　(2) 时间：1s

(3) 时间：1.5s　　(4) 时间：2s

图 10-34　火箭(FR-1-A)的飞行照片[80]

例 3　截尖三角翼的火箭颤振试验[70]。为了对颤振速度的估算公式进行修正，用直径为 127 mm 的火箭（如图 10-35 所示），对前缘后掠角为 40°、50°和 60°以及尖削比为 1∶7 的三组共 9 个机翼模型

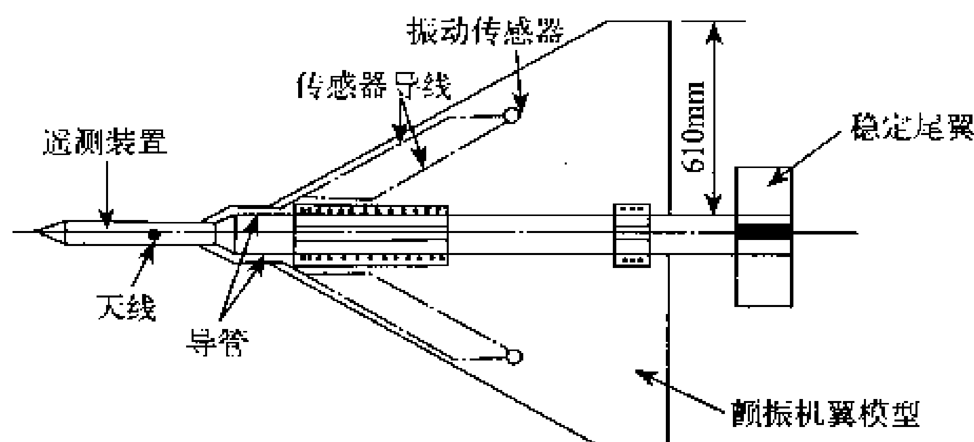


图 10-35　三角翼火箭模型结构

作了试验研究。这里，我们列举 60°截尖三角翼模型为例，半翼展为 610 mm，梢弦为 175 mm，根弦为 1 226 mm，厚度比为 4.5%（弦长）。该火箭的最大速度约为 610 m/s，相应的马赫数为 1.8。颤振试验时，在模型 1198 的每一机翼上安放一个振动传感器，以确定对称颤振或者反对称颤振；对于模型 1196，1197，只在一个机翼上安放振动传感器。火箭以 12.5°的仰角发射，用连续的摄影记录从遥测发射机发来的讯号。模型的飞行轨迹用电影摄影机跟踪，利用多普勒装置测定速度，从而可以确定颤振发生时的速度、加速度、颤振频率以及机翼破坏时的速度，这些结果列于表 10-11。通过火箭颤振试验结果与估算的颤振速度的比较，对于刚度比大的三角翼，建议在估算公式中引进一个修正的刚度比因子。这样，估算出来的颤振速度在测量速度的±15%以内（见(9-30)式）。

表 10-11 60°截尖三角翼的火箭颤振试验结果[70]

模型编号	颤振临界速度 U_f/(m/s)	与 U_f 对应的马赫数 M	颤振频率 ω_f(r/s)	加速度 (g)	机翼破坏时的速度 U_F(m/s)
1196	314	0.92	50	49	366
1197	直到 579 m/s 还不颤振				
1198	387	1.14	45	39	561

§ 3. 自由下滑模型的颤振试验

这种试验方法与地面发射火箭的颤振试验有相似之处，也有不同之处。自由下滑模型是作无动力飞行，带有振动传感器的颤振模型安装在炸弹型的机体上，该机体内还装有遥测发射机，当飞机把自由下滑模型带到预定的高度(例如 12 000 m 高度)、预定的地点，将自由下滑模型像扔炸弹一样投下来，模型在空气中飘荡时，用雷达跟踪，由此求得下滑的轨迹和速度；同时，由地面站记录由遥测发射机发来的振动讯号。综合这两部分结果，可确定颤振速度、颤振频率等。在选取遥测装置和振动传感器时，应考虑到能在很大的温度范围内可靠地工作，还要考虑飞机对自由下滑模型产生的附加振动。只要选择适用的飞机，自由下滑模型试验就能满足大气密度和马赫数要求。因此，自由下滑模型的颤振试验方法应当得到重视。

§ 4. 火箭车颤振试验

高速火箭车能够用来鉴定全尺寸飞机的部件和导弹的颤振特性。模型安装在沿钢轨滑动的架车上，以火箭作动力把火箭车加速到所需要的速度。在火箭车上装有遥测装置和照相设备。全尺寸试验中用的都是真实部件，因此就不需要设计、制造小尺寸的模型。在以前介绍的几种试验方法中，均采用所谓相似模型，或者称为比例模

型，无论是模型设计、制造，均是比较精细的过程。而火箭车颤振试验则避免了这些麻烦，但也出现了新的问题，如火箭车的结构必须考虑到：承受启动和停车时的载荷，翼面颤振破坏时所产生的载荷，设计时要注意减轻火箭车的重量；在气动力方面，要很好地实现飞行状态下试验部件附近的流动，力求减小火箭车的空气阻力、地面干扰等。火箭车上设置的传感器和遥测发射机应能承受 $20g$ 以上的加速度，如果所用的部件需要回收，则减速段必须考虑能承受 $50g$，这与采用何种刹车方法（通常用水力刹车）有关。火箭车上的仪器还要能承受火箭车的振动，该振动是由滑轨的角度误差和火箭车滑块的磨损引起的。因此，应把火箭车振动引起传感器的响应和颤振引起传感器的响应区别开来。

在美国有十多条为火箭车而铺设的轨道，其中最长者达 10.6 公里，这里我们列举几个可供颤振试验的火箭车场地（见表 10-12）。有关火箭车的细节可参阅文献[83]、[84]。

表 10-12　美国的几个火箭车试验场地[83][84]

设置地点	轨道长度(km)	最大速度(m/s)	刹车方式	启用年份	所属单位
加利福尼亚州中国湖	6.55	1 570	水力	1953	海军武器试验站
加利福尼亚州	3.05	610	水力	1948—1949	爱德华空军基地
纽米西哥州霍洛曼	10.6	480	水力	1958	空军导弹研制中心

此外，我们展示用火箭车作颤振试验的两张照片。图 10-36 是用支杆支撑的导弹超音速颤振试验。图 10-37 是美国道格拉斯飞机公司的 A4D 尾翼颤振试验装置（文献[85]），飞机的整个后机身和火箭车作成一体。

以上介绍了用风洞、地面发射火箭、自由下滑模型以及火箭车等试验方法进行颤振试验，文献[75]对试验方法作了全面的、系统的论

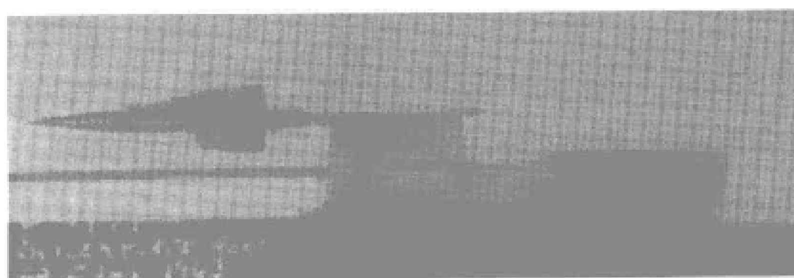


图 10-36　支杆支撑的导弹超音速颤振试验[85]



图 10-37　飞机尾翼颤振试验的火箭车[85]

述和总结。随着科学技术的迅速发展，颤振试验时的判断和记录，也有了新的方法。例如美国 NASA 采用过一种系统，可以监听从模型上某个振动传感器传来的讯号，当达到预定的振幅时，系统工作，开始记录在给定时间内，超过该振幅的周数，作为颤振的指示。法国 ONERA 用频谱分析仪对测量讯号进行分析，并记录模型在亚临界时的频率和阻尼。大多数情况下，阻尼随动压的增加而变化，给出模型趋于颤振的很好指示，并可外推到实际的颤振点。此外，过去作风洞颤振试验，需要风洞长时间的多次运转，有时会引起模型疲劳破坏，用这种方法分析亚临界情况，再外推到颤振点，也不够准确。后来，发展了快速频率扫描和数字分析法，不但可以缩短试验时间，且精度大为提高。

§5. 飞行颤振试验

飞行试验是对颤振问题的最后检验。试验项目除了颤振之外，还要包括抖振、阵风响应以及弹性变形对动稳定性的影响等。通常，在气动弹性方面经过精心设计的飞机，除了较次要的部件之外，是不会发生气动弹性问题的。但是，在进行飞行试验时，仍然要十分小心，例如颤振一发生，很可能造成严重事故。为此，采取两种方法：一是在飞行试验之前，对亚临界条件下的结构响应特性，进行仔细的研究，以确保接近临界条件时的安全性，或者将飞行试验限制在亚临界范围，再把结果外推到临界点；二是对飞机作某些修改，以确保试验的安全，然后从试验结果中去掉修改所带来的影响。

在飞行试验时，对结构进行激振有很多种方法。目前常采用的方法有：利用小型脉冲火箭，进行脉冲式激振；利用电磁激振器或者电动液压激振器进行正弦式激振。英法联合研制的"协和"式超音速民航飞机作飞行试验时，采用了电磁激振器。飞机结构响应通过安装在不同部位的应变计或者位移、速度、加速度传感器进行测量，结果记录在磁带上。

对飞行试验来说，数据处理是个极大的问题。例如，美国的一架飞机作了一次动态飞行试验，用了二十一条磁道（每条磁道可记录 64 路讯号）作数据记录，每条磁道记录数据速率为 100 千码位/秒，总的记录数据率为 2.1 兆码位/秒，这次试验共进行了 90 分钟，因此，数据量是相当可观的。为了及时地迅速地对如此大量的数据进行处理，应当发展一套快速的数据处理系统。

飞行颤振试验对于一些高速飞机，是值得注重的试验项目。例如美国的 F-106 飞机[86]、F-15 飞机[87]以及 YF-16 飞机[88]等作了飞行颤振试验。

附录　影响系数方法在颤振分析中的应用

影响系数方法的中心思想是把结构划分为若干小块，即把连续的弹性体简化为有限个质点组成的质点系，再考虑质点与质点之间的关于结构和气动力的相互影响。用影响系数方法解颤振问题，在数学上归结为求解颤振特征方程式的特征值和特征向量。只要所提供的结构特性（如质量矩阵、柔度影响系数矩阵等）是准确的，采用的气动力理论是合适的，则能获得满足工程要求的颤振分析结果。

以下，我们首先推导颤振特征方程式，其次给出非定常气动力影响系数的矩阵形式。

§1. 颤振特征方程式

数学上，柔度影响函数 $C(x,y;\xi,\eta)$ 表示点 (ξ,η) 上的单位力给点 (x,y) 所引起的挠度，于是，得到下列的翘曲积分方程式：

$$h(x,y)=\iint_s C(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{11-1}$$

式中，$f(\xi,\eta)$ 为作用在单位面积上的载荷。

(11-1)式写成矩阵形式，即

$$\{h\}=[C]\{F\} \tag{11-2}$$

对翼面而言，作用在它上面的力包括惯性力、气动力以及结构阻尼力等。

$$\{F\}=\{F^{(I)}\}+\{F^{(A)}\}+\{F^{(D)}\} \tag{11-3}$$

设外力是正弦型的，且翼面按外力的频率作简谐运动，则作用在全部影响点上的惯性力表示为：

$$\{F^{(I)}\} = -[m]\{\ddot{h}\} = \omega^2[m]\{h\} \tag{11-4}$$

式中，$[m]$为对角的质量矩阵，每一小块的质量集中在其重心上。

作用在全部影响点上的气动力为：

$$\{F^{(A)}\} = [A]\{h\} \tag{11-5}$$

式中，$[A]$为气动力影响系数矩阵，其元素 A_{ji} 表示 i 点的单位挠度在 j 点上所引起的气动力。通常，它是复数，对于不同的气动力理论，则有着不同的形式。

结构阻尼力表示为：

$$\{F^{(D)}\} = -\frac{g}{\omega}[K]\{\dot{h}\} = -ig[K]\{h\} \tag{11-6}$$

式中，$[K]$为结构刚度影响系数矩阵，其元素 K_{ji} 表示与 i 点的单位位移相关的 j 点力。(11-6)式的负号表示结构阻尼力是阻止翼面运动的。g 为结构阻尼系数，约为 0.005～0.05 的量级。结构阻尼在本质上是结构的摩擦，它影响着稳定边界的位置。一般，令 $g=0$，由此得到的颤振计算结果略为保守，但它却构成了稳定区和不稳定区的边界。

将(11-4)、(11-5)和(11-6)式代入(11-3)式，则(11-2)式变成：

$$\{h\} = \omega^2[C][m]\{h\} - ig[C][K]\{h\} + [C][A]\{h\} \tag{11-7}$$

注意到柔度影响系数矩阵和刚度影响系数矩阵有如下的互逆关系式：

$$[C][K] = [1] \tag{11-8}$$

经过化简、整理，(11-7)式改写为：

$$\Omega\{h\} = [U^{(S+A)}]\{h\} \tag{11-9}$$

这就是我们所求的颤振特征方程式。

式中，$\Omega = \left(\frac{1}{\omega^2}\right)(1+ig)$ (11-10)

$$[U^{(S+A)}] = [U^{(S)}] + [U^{(A)}] \tag{11-11}$$

以及

$$[U^{(S)}] = [C]\lceil m \rfloor \tag{11-12}$$

$$[U^{(A)}] = \frac{1}{\omega^2}[C][A] = \sigma[C][\overline{A}] \tag{11-13}$$

对于不同的气动力理论，σ、$[\overline{A}]$有着不同的形式。

按复矩阵迭代，可求得各阶特征值，且满足如下条件：

$$\Omega_1 > \Omega_2 > \Omega_3 > \cdots > \Omega_n$$

由 $\Omega = \Omega_R + i\Omega_I$，则得颤振频率：

$$\omega_f = 1/\sqrt{\Omega_R} \tag{11-14}$$

颤振临界速度

$$U_f = \frac{\omega_f b_r}{k} \tag{11-15}$$

或者

$$M_f = \frac{\omega_f b_r}{ak}$$

结构阻尼系数

$$g = \Omega_I/\Omega_R \tag{11-16}$$

根据(11-9)式，可导出固有振动方程式：

$$\lambda\{h\} = [U^{(S)}]\{h\} \tag{11-17}$$

式中

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \tag{11-18}$$

$[U^{(S)}]$给出在(11-12)式。对(11-17)式施矩阵迭代，求得最低阶的固有振型和固有振动频率。利用修正公式

$$[U^{(S)}]_{i+1} = [U^{(S)}]_i - \frac{\{h\}_i\lfloor h \rfloor_i[m]}{\omega_i\lfloor h \rfloor[m]\{h\}_i} \tag{11-19}$$

$$(i = 1,2,3,\cdots)$$

将其代入(11-17)式，再作矩阵运算，可得高阶的固有振型和频率。

此外，按下式计算颤振形态：

$$\{h^{(i+1)}\}_{i-j} = \{h^{(i-j+1)}\}_{i-j} - \frac{\Omega^{(i-j+1)} - \Omega^{(i+1)}}{\lfloor U_{i-j-1}^{(S+A)^{i-j}} \rfloor\{h^{(i+1)}\}_{i-j-1}}\{h^{(i+1)}\}_{i-j+1} \tag{11-20}$$

§2. 气动力影响系数

以简单的狭条理论为例，先给出它的一般表达式，再分别列写亚音速、超音速以至高超音速的气动力影响系数。

假设绕机翼任一剖面的流动是二元的，弦向是刚硬的，且气动力作用在四分之一弦线上。于是，气动力影响系数矩阵由

$$\{F^{(A)}\} = \rho\,\omega^2 b_r^2 l[\overline{A}]\{h\} \tag{11-21}$$

确定，则

$$\frac{1}{\omega^2}[A] = \sigma[\overline{A}] \tag{11-22}$$

其中 $\sigma=\rho b_r^2 l$ (11-23)

$[\overline{A}]$——无因次的气动力影响系数矩阵。

值得指出，(11-21)式具有普遍意义，对于复杂的升力面理论和简单的狭条理论均适用。

基于弦向刚硬的假设，一个剖面只须选取两个控制点，就能描述剖面的运动情况。通常，前控制点置于1/4弦点，后控制点可任意安放(图11-1)。设翼剖面作平移和俯仰运动，升力和力矩作用在1/4弦点，则

$$L = c\rho\,\omega^2 b^3 \Delta y\left(L_h \cdot \frac{h}{b} + L_\alpha \cdot \alpha\right) = F_1 + F_2 \tag{11-24}$$

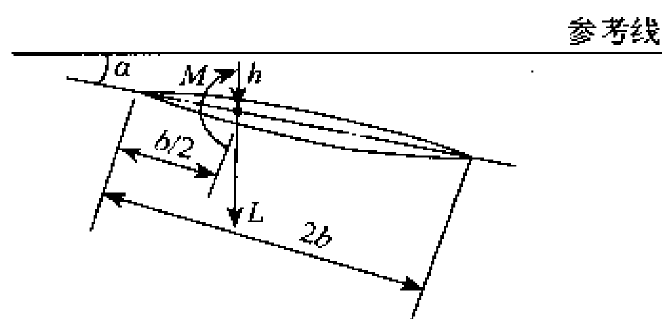
$$M = c\rho\,\omega^2 b^4 \Delta y\left(M_h \cdot \frac{h}{b} + M_\alpha \cdot \alpha\right) = F_2 \cdot d \tag{11-25}$$

将 $h=h_1$ (11-26)

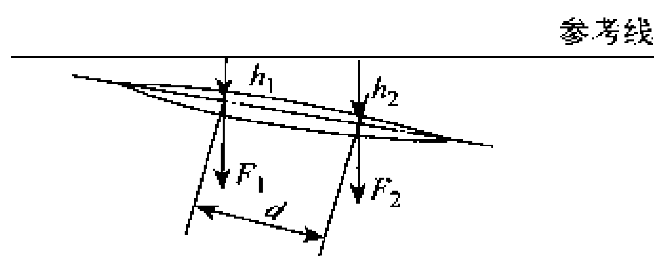
$$\alpha=\frac{h_2-h_1}{d} \tag{11-27}$$

代入(11-24)和(11-25)式，于是，作用在前、后控制点上的力为：

$$F_1 = c \cdot \rho\,\omega^2 b^3 \Delta y\left\{\left[\frac{L_h}{b} - \frac{L_\alpha}{d} - \frac{b}{d}\left(\frac{M_h}{b} - \frac{M_\alpha}{d}\right)\right]h_1 + \left(\frac{L_\alpha}{d} - \frac{b}{d^2}M_\alpha\right)h_2\right\} \tag{11-28}$$



(1)原来的力学系统和翼型几何



(2)相当的力学系统和翼型几何

图 11-1　力学系统和翼型几何

$$F_2 = c\rho\,\omega^2 b^4 \left(\frac{\Delta y}{d}\right)\left\{\left(\frac{M_h}{b} - \frac{M_a}{d}\right)h_1 + \frac{M_a}{d}h_2\right\} \tag{11-29}$$

写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = c\rho\,\omega^2 b^2 \Delta y \begin{bmatrix} 1 & -b/d \\ 0 & b/d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_h & L_a \\ M_h & M_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b/d & b/d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{Bmatrix} \tag{11-30}$$

由此得到一个狭条上的无因次气动力影响系数矩阵的一般表达式

$$[\overline{A}]_i = \begin{bmatrix} 1 & -b_i/d_i \\ 0 & b_i/d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (L_h)_i & (L_a)_i \\ (M_h)_i & (M_a)_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b_i/d_i & b_i/d_i \end{bmatrix} \tag{11-31}$$

将翼面上所有狭条的气动力影响系数组合起来，即

$$[\overline{A}] = c\begin{bmatrix} \left(\frac{b_1}{b_r}\right)^2\left(\frac{\Delta y_1}{l}\right)[\overline{A}]_1 & & & \\ & \left(\frac{b_2}{b_r}\right)^2\left(\frac{\Delta y_2}{l}\right)[\overline{A}]_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \left(\frac{b_i}{b_r}\right)^2\left(\frac{\Delta y_i}{l}\right)[\overline{A}]_i \end{bmatrix} \tag{11-32}$$

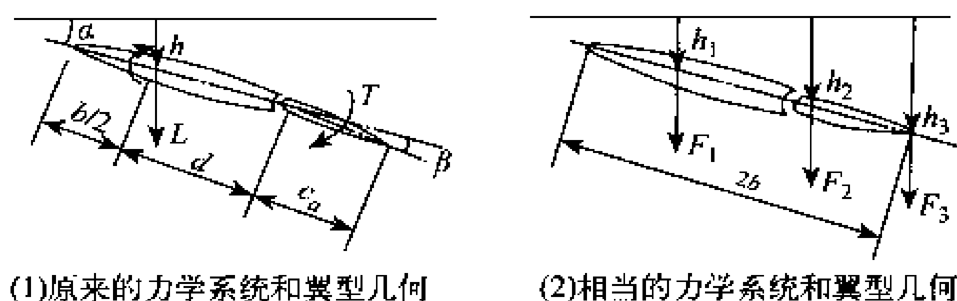
式中，c 为常数。对于亚音速，$c=\pi\cos\Lambda_{\frac{1}{4}}$，其中 $\Lambda_{\frac{1}{4}}$ 为$\frac{1}{4}$弦线的后掠角；对于超音速，$c=4$。

若机翼后缘附加操纵面，其无因次气动力影响系数矩阵有下列形式：

$$[\overline{A}]_i = \begin{bmatrix} 1 & -b_i/d_i & b_i/d_i \\ 0 & b_i/d_i & -(b_i/d_i + b_i/c_{ai}) \\ 0 & 0 & b_i/c_{ai} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (L_h)_i & (L_\alpha)_i & (L_\beta)_i \\ (M_h)_i & (M_\alpha)_i & (M_\beta)_i \\ (T_h)_i & (T_\alpha)_i & (T_\beta)_i \end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b_i/d_i & b_i/d_i & 0 \\ b_i/d_i & -(b_i/d_i + b_i/c_{ai}) & b_i/c_{ai} \end{bmatrix} \tag{11-33}$$

此时，每一狭条上应选取三个控制点：前控制点位于 1/4 弦点，中控制点在操纵面的铰链轴上，后控制点在翼型的后缘上（图 11-2）。



(1)原来的力学系统和翼型几何　　(2)相当的力学系统和翼型几何

图 11-2　翼型—操纵面几何

1. 亚音速气动力系数

不带操纵面的机翼作平移和俯仰运动时的剖面升力和力矩系数与(4-83)式相同。对于所假设的减缩频率 k_r,按下式

$$k_i = \frac{k_r b_i}{b_r} \tag{11-34}$$

换算为各个剖面上的减缩频率值(k_i),其中 b_r 为参考半弦长,b_i 为各个剖面的半弦长。

用二元气动力系数求得的颤振结果是偏于保守的。对于小展弦比翼面,作用在翼尖处的气动力以$\lim\limits_{\varepsilon \to 0}\sqrt{\varepsilon}$的方式趋于零(其中 ε 为到翼尖处的距离)。我们引进一修正因子 $\sqrt{1-\bar{y}^2}$,使剖面升力和力矩系数具有如下形式:

$$\left.\begin{aligned}
L'_h &= \sqrt{1-\bar{y}^2} \cdot L_h \\
L'_\alpha &= \sqrt{1-\bar{y}^2} \cdot L_\alpha \\
M'_h &= \sqrt{1-\bar{y}^2} \cdot M_h \\
M'_\alpha &= \sqrt{1-\bar{y}^2} \cdot M_\alpha
\end{aligned}\right\} \tag{11-35}$$

式中　$\bar{y}=y/l$,在翼根处 $\bar{y}=0$,在翼尖处 $\bar{y}=1$。

若机翼后缘附有操纵面,偏转角为 β。此时,剖面的气动力系数除了 L_h、L_α、M_h、M_α 之外,还应加上 L_β、M_β、T_h、T_α、T_β 等项,它们的表达式见(4-82)式。

2. 超音速气动力系数

具有超音速前缘的二元后掠机翼(图 4-16),作平移和俯仰运动时,相对参考轴的气动力系数 L_h、L_α、M_h、M_α 见(4-166)式。

3. 高超音速气动力系数

不带操纵面的机翼剖面作平移和俯仰运动时,相对于前缘的气动力系数 L_{h0}、$L_{\alpha0}$、M_{h0}、$M_{\alpha0}$ 与(4-182)式同。若机翼后缘带有操纵面,应加上 L_{β_0}、M_{β_0}、T_{h_0}、T_{α_0}、T_{β_0} 等项,它们列于(4-185)式。

如上所述，狭条理论的气动力影响系数均对 1/4 弦点而言。若代入前缘的气动力系数，则(11-31)式改写为：

$$[\overline{A}]_i = \begin{bmatrix} (1+b_i/2d_i) & -b_i/d_i \\ -b_i/d_i & b_i/d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (L_{h_0})_i & (L_{\alpha_0})_i \\ (M_{h_0})_i & (M_{\alpha_0})_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (1+b_i/2d_i) & -b_i/2d_i \\ -b_i/d_i & b_i/d_i \end{bmatrix} \tag{11-36}$$

若机翼带有操纵面，(11-33)式则变成下列形式：

$$[\overline{A}]_i = \begin{bmatrix} 1+b_i/2d_i & -b_i/d_i & (b_i/c_{ai})(3b_i/2d_i-1) \\ -b_i/2d_i & b_i/d_i & -(b_i/c_{ai})(3b_i/2d_i) \\ 0 & 0 & b_i/c_{ai} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (L_{h_0})_i & (L_{\alpha_0})_i & (L_{\beta_0})_i \\ (M_{h_0})_i & (M_{\alpha_0})_i & (M_{\beta_0})_i \\ (T_{h_0})_i & (T_{\alpha_0})_i & (T_{\beta_0})_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (1+b_i/2d_i) & -b_i/2d_i & 0 \\ -b_i/d_i & b_i/d_i & 0 \\ b_i/d_i & -(b_i/d_i+b_i/c_{ai}) & b_i/c_{ai} \end{bmatrix} \tag{11-37}$$

4. 用活塞理论表示的气动力系数

与狭条理论一样，将翼面分成平行于气流方向的若干个弦向狭条，写出每个狭条的厚度函数表达式，并在每一狭条上选取必要的下洗配置点(一般，一个狭条上的下洗配置点数不少于三个)。于是，作用在翼面上的气动力表示为

$$\{F^{(A)}\} = [\Delta s]\{\Delta P\} = -\frac{2\rho}{M}\omega^2 [\Delta S \cdot B(x)][\overline{W}]\{h\} \tag{11-38}$$

式中 Δs——翼面的分块面积；

ΔP——分块上的压力差；

$$B(x)=1+G\frac{\partial\tau}{\partial x} \tag{11-39}$$

$$[\overline{W}]=[(\frac{b_r}{k_i})^2[D]+i(\frac{b_r}{k_r})[1]] \tag{11-40}$$

以及　$G=\frac{\gamma+1}{2}M$（γ 为比热比，对于空气 $\gamma=1.4$）；

τ——翼型厚度函数；

$[D]$——点微分矩阵，其元素按拉格朗日插值公式求得（文献[19]）。

于是，气动力影响系数矩阵由(11-38)式得到

$$[\overline{A}]=-\frac{2\rho\omega^2}{M}[\Delta s\cdot B(x)][\overline{W}] \tag{11-41}$$

参 考 文 献

[1] 井町勇编著. 机械振动学[日], 尹传家、黄怀德译校. 北京:科学出版社. 1979年5月第1版.

[2] D. Williams, D. Sc, M. I. Mech, E., F. R. Ac. S. 用数字计算机求机翼结构影响系数的一般方法. 专题译丛《颤振问题》(译自ARC R&M3048). 国防科学技术资料编辑部第四室.

[3] Levy, S:Computation of Influence Coefficients for aircraft structures with Discontinuities and sweepback. J. Aeron. Sci, Bd. 14(1947) p. 547—560.

[4] Levy, S:Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings. J. Aeron. Sci. Bd. 20(1953). p. 449—454.

[5] H. W. Försching:Grundlagen der Aeroelastik. Springer-Verlag 1974.

[6] 华东水利学院编著. 弹性力学问题的有限单元法. 北京:水利电力出版社, 1974.

[7] 齐基威次著. 结构和连续力学中的有限单元体法. 上海交通大学《有限单元体法》翻译组. 北京:国防工业出版社, 1975.

[8] 三本木茂夫, 吉村信敏著. 有限单元法结构分析及程序. 北方交通大学铁道建筑系译. 北京:中国建筑工业出版社, 1975.

[9] Eldon E. Kordes, Edwin T. Kruszewski 和 Deene J. Weidman:对45°三角翼的振型试验和影响系数试验专题译丛《颤振问题》, 1961年. 国防科学技术资料编辑部第四室. (译自NACA TN 3999).

[10] John S. Archer: 自振形态分析的刚度矩阵法:《美国关于气动弹性问题的专家会议资料》.

[11] Hanson, Perry W., & Tuovila, W. J. Experimenentally determined natural vibration modes of some cantilever-wing flutter models by using an acceleration method. NACA. TN 4010. 1957.

[12] P. W. Hanson 和 G. M. Levey. 一些极小展弦比平板在马赫数0.62到3.00的颤振研究的试验和计算结果.《火箭导弹技术》1965年第3期(译自NASA. TM X-53).

[13] 考虑火箭结构的气动弹性时稳定性的初步分析方法.《宇宙航行》1964

年第 3 期.

[14] Watkins, C. E. & Woolston, D. S. A systematic kernel function procedure for determining aerodynamic forces on oscillating or steady finite wings at subsonic speeds. NASA. TR. R-48. 1959.

[15] Richardson, J. R. A method for calculating the lifting forces on wings (unsteady subsonic and supersonic lifting-surface theory) ARC. R&M 3157, 1955.

[16] Boris Laschka: Zur Theorie der harmonisch schwingenden tragenden Fläche bei Unterschllanströmung. z. f. w. 1963, 7.

[17] 徐宝渾. 最近在小展弦比机翼颤振分析方面的一些发展.《美国关于气动弹性问题的专家会议资料》.

[18] А. Н. картазина и Э. А. Чистова: Таьлици срункции Бесселя от мнимо о аргумента и интегралов от них. 1958.

[19] 吴仲华. 不等距数值微分公式与系数表及其在偏微分方程数值解上的应用. 北京:科学出版社.

[20] Laidlaw, W. R.: Theoretical and experimental prossure distributions on low aspect ratio wings oscillating in an incompressible flow. M. I. T. ASRL TR51-2.

[21] Leadbetter S. A. etc.: Experimental investigation of oscillatory aerodynamic forces, moments, and pressures acting on a tapered wing oscillating in pitch at Mach numbers from 0.40 to 1.07. NASA. TN D-1236. 1962.

[22] Landahl, M. T. Unsteady transonic flow. 1961.

[23] Runyan, H. L, & Woolston, D. S.: Method for calculating the aerodynamic loading on an oscillating finite wing in subsonic and sonic flow. NACA. TR 1322. 1956.

[24] Watkins, C. E., Runyan, H. L., & Woolston, D. S.,: On the kernel function of the integral equation relating the lift and downwash distributions of oscillating finite wings in subsonic flow. NACA. Rep 1234. 1955.

[25] Milton D. Van Dyke. 超音速二元非定常二次理论. 专题译丛《二元非定

常气动问题》. 国防科学技术资料编辑部第四室,1961(译自 NACA. Rep 1183).

[26] Rodden, W. P. & Revell, J. D. :Oscillatory aerodynamic coeffients for a unified suppersonic-hypersonic strip theory. J. A. S. S. 1960. 6.

[27] 《专题译丛》. 超音速气动力手册. 国防科学技术资料编辑部第四室, 1961.(译自 NAVORD. Rep 1488. vol. 4).

[28] Herbert C. Nelson. :Lift and moment on oscillating triangular and related wings with supersonic edges. NACA. TN. 2494, 1951.

[29] H. J. Cunningham. :Lift and moment on thin arrowhead wings with supersonic edges oscillating in symmetric flapping and roll and application to the flutter of an allmovable control surface. NACA. TN 4189. 1950.

[30] H. J. Cunningham. :Total lift and pitching moment on thin arrowhead wings oscillating in supersonic potential flow. NACA. TN 3433. 1955.

[31] Rodden, W. P. & Revell, J. D. :The status of unsteady aerodynamic influence coefficients. AD. 272. 908, 1961.

[32] Miles, J. W. The potential theory of unsteady supersonic flow. 1959.

[33] John Duyundji & John, D. C. Crisp. On the aeroelastic characteristcs of low aspect ratio wings with chordwise deformations. P. B. 143960. 1959.

[34] J. Stuart Keith. New techniques in flutter at high Mach numbers. P. B. 181031.

[35] D. L. Woodcock. A comparison of methods used in lifting surface theory. AGARD. Rep No. 583. 1971. (NASA N71—35198; AD728279).

[36] Sewall, J. L., Robert, W. H. & Watkins, C. E. Use of subsonic kernel function in an influence-coefficient method of aeroelastic analysis and some comparisons with experiment. NASA. TN D-515. 1960.

[37] Tuovila, W. J. & McCarty John Locke. Experimental flutter results for cantileverwing modes at Mach number up to 3.0. NACA RM L55 E11. 1955.

[38] Homer, G. M, Vera Huckel. & Runyan, H. L. Procedure for calculation flutter at high supersonic speed including camber deflections and comparison with experimental results. NACA. TN 4335.

[39] 芦叔金. 小展弦比机翼颤振速度计算的改进意见.
[40] C. H. Wilts. 超音速三角翼颤振特性计算法的研究以及与实验数据的比较. 专题译丛《颤振问题》. 国防科学技术资料编辑部第四室，1961年. (译自 NASA. TN D-5).
[41] Molyneux, W. G. etc. The aerodynamic effects of aspect ratio and sweepback on wing flutter. ARC. R&M. 3011. 1957.
[42] Application of the NASA kernel function procedures to generally deforming wings. AD. 289. 882. 1962.
[43] Bernard Mazelsky. & Harry B. 小展弦比机翼的颤振参数和广义力之间的关系.《火箭导弹技术》1965 年 3 月. (尹传家译自 AD. 289. 881)
[44] フラッターの空气力学《日本航空会誌》vol. 7. 1959.
[45] Ashley, H. & Zartarian, G. 活塞理论——一种新的气动力工具. 专题译丛《颤振问题》. 国防科学技术资料编辑部第四室(译自 J. A. S. 1956. 12.). 1961.
[46] I. E. Garrick 和 S. I. Rubinow. 二元超音速流中翼型颤振和振动空气动力的计算. 专题译丛《二元非定常气动问题》. 1961 年. (译自 NACA Rep 846.).
[47] Woolston, D. C. etc.; Analytical and experimental investigation of aerodynamic forces and moments of low-aspect ratio wings undergoing flapping oscillations. NACA. TN4302. 1958.
[48] P. N. Gustafson, W. F. Stokey & C. F. Zorowski,; The effect of tip removal on the natural vibrations of uniform cantilevered triangular plates. J. A. S. 1954. 9. p. 621—633.
[49] 市川辉雄. 细长翼身组合体的空气动力弹性不稳定问题. 专题译丛《颤振问题》. 国防科学技术资料编辑部第四室，1961 年.
[50] Morikawa, G. Supersonic wing-body lift. J. A. S. vol. 18. 1954. 4; p217.
[51] Less, L. Hypersonic flow. 1955.
[52] 市川辉雄. 翼身组合体的颤振(马赫数的影响). 专题译丛《颤振问题》. 国防科学技术资料编辑部第四室，1961 年. (译自《日本航空学会志》B 卷第 78 号 1960. 7).

[53] 绪方胜彦. 现代控制工程. 卢伯英,佟明安,罗维铭译. 北京:科学出版社,1976.

[54] D. Moxon. : Aeroelastic problems of high speed aircraft. ARC. C. P. 668. 1964.

[55] Sylvoster. M. A. & J. E. Baker. Some experimental studies of panel flutter of Mach number 1.3. NACA. TN 3914. 1957.

[56] Eisley, J. G. The flutter of a two-dimensional buckled plate with clamped edges in a supersonic flow. AFOSR. TN 56—296, 1956.

[57] M. S. 史密斯. 结构动力学. 五〇四翻译小组译. 北京:国防工业出版社,1976.

[58] John, C, Houbolt. A study of several aerothermoelastic problems of aircraft structures in high-speed flight. 1958.

[59] Bisplinghoff, R. L. Some structural and aeroelastic consideration of high speed flight. J. A. S. 1956,4.

[60] Budiansky, Bernard & Mayers, J. Influence of aerodynamic heating on the effective torsional stiffness of thin wings. J. A. S. 1956,12.

[61] 小林繁夫. 受空气动力加热而产生的翼颤振. 专题译丛《颤振问题》. 1961 年. 国防科学技术资料编辑部四室(译自"宇宙科学技术シソボヅウム"1960.2).

[62] I. E. Garrick. 气动力理论及其在颤振研究中的应用. 专题译丛《颤振问题》,国防科学技术资料编辑部四室. 1961 年. (译自 AGARD Rep 34).

[63] I. E. Garrick. Some concepts and problems area in aircraft flutter. 《The 1957 Minta Martin Aeronautical Lecture IAS》.

[64] С. Н. Кан, И. А. Свердлов. Расчет Самолета на прочность. Издательство《Машиностроенле》1966.

[65] Theodorsen, T. & Garrick, I. E. Mechanism of flutter, a theoretical and experimental investigation of the flutter probem. NACA. Rep. 685. 1940.

[66] R. L. Bisplinghoff, etc. Aeroelasticity. 1955.

[67] R. L. Bisplinghoff & H. Ashley. Principles of aeroelasticity. 1962.

[68] H. Ashley & G. Zartarian. Supersonic flutter trends as Revealed by piston theory calculations. WADC. TR 58 74. 1959.

[69] W. G. Molyneux & F. Ruddlesden. Some flutter tests on sweptback wings using ground launched rockets. ARC. R & M 2949. 1953.

[70] W. G. Molyneux. 利用地面发射火箭的三角翼颤振试验.《火箭导弹技术》1965 年 3 月.（尹传家译自 ARC. R & M 3231）.

[71] C. Beatrix. 俯仰对导弹颤振临界速度的影响. 专题译丛《颤振问题》, 1961 年.（译自"La Récherche Aéronautique" 1960, No. 74: 55—59）. 国防科学技术资料编辑部第四室.

[72] Johannes, R. P. & Thompson, G. O. B-52 Control configured vehicles program. Advances in control systems. AGARD CP-137, 1974.

[73] I. E. Garrick. Aeroelasticity—Frontiers and Beyond. AIAA. Paper No. 76 219, 1976.

[74] 高速模型颤振试验.《日本航空学会志》第 10 卷第 104 号.

[75] AGARD《Manual on Aeroelasticity》Vol. Ⅳ. Part Ⅳ. Experimental methods.

[76] Gerald D. Walberg. :Subsonic kernel-function flutter analysis of a highly tapered tail surface and comparison with experimental results. ANSA. TN D-379. 1960.

[77] George, W. Jones, Jr. & Lous Young, Jr. Transonic flutter investigation of two 64° delta wings with simulated streamwise rib and orthogonal spar construction. NACA. RM L56I27.

[78] P. W. Hanson. , Aerodynamic effects of some configuration variables on the aeroelastic characteristics of lifting surfaces at Mach numbers from 0.7 to 6.86. NASA. TN D-984.

[79] Flutter testing techniques. Section Ⅰ, Ⅱ. NASA N77-21022. 1976.

[80] Ellwyn E. Angle. Initial flight test of the NACA FR-1-A, a low-accelaratior rocket-propelled vehicle for transonic flutter research. NACA. RM L7 J08. 1948.

[81] W. G. Molyneux, F. Ruddlesden. & P. J. Cutt. Technique for flutter tests using ground-launched rockets, with unswept wings. ARC. R &

M 2944. 1951.

[82] Ellwyn, E. Angle. Initial flight tests of the NACA FR-2 a high-velocity rocket-propelled vehicle for transonic flutter research. NACA. RM L7 J20. 1948.

[83] 丁浩编译. 火箭橇试验技术.《火箭导弹技术》1965.3.

[84] 吕回节译. 火箭车《国际航空》1959.6.

[85] W. J. Stronge. 用火箭撬作气动力试验.《火箭导弹技术》1965.3.(译自《AIAA Aerodynamic testing conference》1964,3.).

[86] F-106 的颤振飞行试验.《航空技术报导》(飞行器类)1959 年第 8 期.

[87] Henry Katz, Francis G. Foppe, and Daniel T. Grossman. F-15 Flight Flutter test program. NASA N77-21022.(16) 1976.

[88] Warren J, Brignac, Halvor B. Ness, Maynard K. Johnson, and Larz M. Smith. YF-16 Flight Flutter Test Procedures. NASA N77-21022 (17). 1976.

[89] 《振动工程大全》上册[日]《振动工程大全》编辑委员会编. 东京工业大学名誉教授,工学博士,谷口修主编. 尹传家译. 黄怀德校. 北京:机械工业出版,1983 年 3 月第 1 版.

[90] 《振动工程大全》下册[日]《振动工程大全》编辑委员会编. 东京工业大学名誉教授,工学博士,谷口修主编. 尹传家译. 黄怀德校. 北京:机械工业出版社,1986 年 12 月北京第 1 版.

[91] 《机械模态分析》[日]大久保信行著. 尹传家译. 徐敏校. 上海交通大学出版社. 1985 年 9 月第 1 版.

[92] 公害防止技术《振动篇》[日]公害防止技术和法规编委会编. 卢贤昭译. 尹传家校. 北京:化学工业出版社,1991 年 9 月第 1 版.

[93] 《气动弹性力学现代教程》[美] E·H·道尔,H·C·小柯蒂斯,R·H·斯坎伦,F·西斯托著. 陈文俊,尹传家译. 崔尔杰审校. 北京:宇航出版社,1991 年 3 月第 1 版.

后 记

1903 年 12 月 17 日，美国的 Wright brother(莱特兄弟)驾驶着他俩设计、制造的“飞行者一号”飞机离开地面，只飞行了 12 秒钟，飞行距离为 36.6 m，飞行速度不过每小时 48 km。就是这么一架不起眼的双翼布蒙皮-木质飞机，翻开了人类航空史上的重要一页，开辟了飞行器重于空气的飞行时代。

然而，人类在飞行器日新月异的发展过程中，不时遇到颤振，酿成机毁人亡的恶果。因此，它一直是航空航天科研部门和生产单位的关注重点。

以往，科研人员习惯地以强度要求作为飞行器结构的设计准则。而对于高速飞行器，刚度要求已成了主要的结构设计依据。强度和刚度要求虽属结构设计中的两个不同的概念，事实上却又是统一的。一般说来，刚度要求高于强度要求。作者希望：飞行和导弹(尤其是有翼导弹)的设计人员精心设计，避免飞行中出现颤振现象。现在，每年世界民航喷气客机总要发生多起空难，除了机械故障外，也不排除气动弹性招致的恶果。为此，作者把近四分之一世纪的工作探索、文献积累撰写成一部三十多万字的书稿以正式出版物的形式奉献给读者，以回报国家和人民几十年对作者的培育之恩。

书稿曾经曹柏桢、周志宗、宋多经、黄怀德和崔尔杰等*人审阅。尤其是崔尔杰院士对书稿作了全面的、仔细的审定，并提出了许多修改意见和斟酌之处。作者在此基础上又作了几次重大修改和补充。

在书稿撰写过程中，作者原所在单位的描图组帮助绘制了大量的插图，照相室帮助拍摄了文献上的许多照片。在此，作者顺致谢意。

为避免泄密，书稿中所用的例子均属国外文献上的。由于各种

文献资料所用的符号和用词不一，作者力求统一。

这里，我要衷心感谢北京航空航天大学原校长沈士团教授在百忙当中，抽出时间为本书写序，感谢（北京）原子能出版社谭俊主任于今年年初利用到南方出差的机会，专程来深圳与作者会面，并就出版事宜达成了共识。

此外，作者还要深深地感谢国防科委情报所（原总字 749 部队）的同志们。在我近 30 年的航天科研工作中，他们总是在第一时间内为我提供着绿色通道式的优质服务，使我快捷地在世界知识的海洋中找到了所需的英、俄、日、德等多文种的国防研究资料，虽然在那时因工作关系相互都不通报姓名，作者在此向这些不留名的英雄们致以崇高的敬意！我永生都忘不了这些那时与我曾穿着相同黄色军装的革命战友们对我的厚爱和帮助。

作者希望本书对工程技术人员、科学工作者和大专院校师生了解气动弹性力学中的最为重要的颤振分支有所帮助。由于作者的水平有限，谬误和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

尹传家

二〇〇七年五月七日于深圳

* 曹柏桢系作者所在航天研究院总体设计部主任。

周志宗系作者所在航天研究院总体设计部第二研究室主任、研究员、某导弹副总设计师。

黄怀德系北京强度环境研究所原总工程师，研究员。

崔尔杰系北京空气动力研究所原所长，中国工程院院士。

宋多经系作者所在航天研究院总体设计部第六研究室主任，教授级高级工程师，后调任国务院国家外国专家局对外联络司司长。